УДК 519.216

ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ІЗ РОЗПОДІЛОМ, ЩО Є ЗГОРТКОЮ НОРМАЛЬНОГО І РІВНОМІРНОГО РОЗПОДІЛІВ МЕТОДОМ ПОРЯДКОВИХ СТАТИСТИК

М.М. Дороховець, *доктор технічних наук, професор Національного університету "Львівська політехніка"*
І.В. Попович, *аспірант Національного університету "Львівська політехніка"*

М.М. Дороховець

І.В. Попович

Запропоновано застосування методу порядкових статистик для опрацювання спостережень, які є сумою спостережень із нормальним та рівномірним розподілами. Цей метод забезпечує отримання меншої стандартної непевності результату порівняно із стандартною непевністю середнього значення. Подано результати досліджень методу — стандартну непевність залежно від взаємного вмісту складових та кількості спостережень.

In the article the method based on order statistics for processing of the observations, which is the sum of observations with normal and uniform distributions, is proposed. This method gives a smaller standard uncertainty of the result compared to a standard uncertainty of a mean value. The research results of method, which are the standard uncertainty depending on the relative content of components and the number of observations, are presented.

Постановка проблеми

Необхідною складовою вимірювань є оцінювання непевності отримуваних результатів [1]. У міжнародних документах, зокрема [1], основна кількісна міра якості результату названа як "uncertainty", а в українських нормативних документах [2, 3] цей термін перекладено як "невизначеність", що не є цілком коректно. Згідно з одним із найкращих словників [4], українською цей термін повинен називатися "непевністю". У статті надалі використовуємо термін "непевність", зміст якого краще відображає суть терміна "uncertainty".

Якщо результати спостережень є нестабільними, то оцінювання непевності здійснюють методом типу А, тобто статистичним методом [1]. Наприклад, якщо густина розподілу генеральної сукупності не суперечить моделі нормального розподілу, тоді після реєстрації результатів спостережень x_1, x_2, ..., x_n (вибірки обсягом n) найкращим результатом є середнє значення [1]:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

а його стандартна непевність типу А [1, 5]:

$$u_A\left(\bar{x}\right) = S_{\bar{x}} = S_x \big/ \sqrt{n} \text{, де } S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 .$$

Якщо є переконливі аргументи щодо прийняття моделі рівномірного розподілу, тоді найкращим результатом є середина розмаху вибірки: $x_{\text{с.р.}} = \left(x_{(1)} + x_{(n)}\right)\big/2$ (де $x_{(1)} = \min(x_i)$ та $x_{(n)} = \max(x_i)$ — мінімальний і максимальний результати спостережень, перший та останній члени впорядкованої вибірки), а стандартна непевність типу А результату (середини розмаху) дорівнює [5]

$$u_A(x_{\text{с.р.}}) = \frac{V}{(n-1)}\sqrt{\frac{n+1}{2\cdot(n+2)}} ,$$

де $V = x_{(n)} - x_{(1)}$ — розмах вибірки. Якщо обґрунтовано приймається модель розподілу Лапласа, тоді найкращим результатом є медіана вибірки, член із серединним номером упорядкованої вибірки $x_{\text{мед}} = x_{(n+1)/2}$ при непарній кількості спостережень; або середнє значення із двох центральних членів упорядкованої вибірки $x_{\text{мед}} = \left(x_{(n/2)} + x_{(n/2)+1}\right)\big/2$ при парній кількості спостережень, а стандартна непевність типу А результату (медіани) дорівнює [5] $u_A(x_{\text{мед}}) = S_x \big/ \sqrt{2n}$.

Часто вимірювальні спостереження не підпорядковано якомусь "чистому" розподілу (наприклад, нормальному, Лапласа, рівномірному тощо), а це може бути комбінацією двох чи більше якихось типових розподілів, наприклад, згорткою нормального і рівномірного розподілів. Форма розподілу суми $x = x_1 + x_2$ двох незалежних випадкових величин x_1 і x_2 залежить від їх густин розподілу $p_1(x_1)$ і $p_2(x_2)$ та їх взаємного вмісту в сумі і визначається згорткою розподілів:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x - x_2) \cdot p_2(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) \cdot p_2(x - x_1) dx_1 .$$

Зокрема, якщо одна з випадкових величин, наприклад x_1, має нормальний розподіл із математичним сподіванням m_n та стандартним відхиленням σ_n, а друга x_2 має рівномірний розподіл з математичним сподіванням m_r та розмахом a, тобто

$$p_1(x_\text{n}) \quad \frac{}{\sqrt{\ \pi\sigma}} e^{\frac{(\text{x}_\text{n} \quad \text{m}_\text{n})}{}} \quad ;$$

$$p_2(x_\text{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & m_\text{r} - a \le x_\text{r} \le m_\text{r} + a; \\ 0, & x_\text{r} < m_\text{r} - a,\ x_\text{r} > m_\text{r} + a, \end{cases}$$

то густина розподілу суми $x = x_1 + x_2$ може бути обчислена за виразом [6–8]

$$p_{\text{n,r}}(x,m,a,\sigma) = \frac{F_\text{n}\left(\left(x - m_\text{x} + a\right)/\sigma_\text{n}\right) - F_\text{n}\left(\left(x - m_\text{x} - a\right)/\sigma_\text{n}\right)}{2a}, \quad (1)$$

де $F_\text{n}(x)$ – функція Лапласа; $m_\text{x} = m_\text{n} + m_\text{r}$ – математичне сподівання суми величин.

Аналіз досліджень та публікацій

Наведений розподіл імовірності (1) використовується при опрацюванні наближених методів розрахунку непевності вимірювання, зокрема, розширеної непевності [6–9]. Цей розподіл ще не має спеціальної назви у вітчизняній літературі, хоча в міжнародних публікаціях його називають "плоско-нормальним розподілом" або "Flatten-Gaussian distribution" [6, 7]. Ця назва добре відображає форму функції густини ймовірності цього розподілу, оскільки в серединній частині розподіл є плоским, а бокові схили є дзвоноподібними і він нагадує сплющену функцію Гауса (рис. 1).

Оцінювання найкращого результату (з найменшим стандартним відхиленням) з такої суми вимагає знання взаємного вмісту складових, однак на практиці переважно такої апріорної інформації немає. У такому випадку, коли інформація про вміст складових відсутня, тобто форма розподілу суми невідома, тоді може бути застосований метод порядкових статистик [10, 11]. За допомогою методу порядкових статистик визначення найкращої оцінки параметра положення $\hat{\mu}$ (центра групування) результатів спостереження і параметра ширини розподілу $\hat{\sigma}$ вибірки полягає у [10, 11]:

• попередньому впорядкуванні спостережень $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$;

• мінімізації суми квадратів S_R^2 відхилень спостережень $x_{(\text{k})}$ від так званих "зразкових" спостережень $xref_\text{k}$, які ідеально відповідають відповідній густині розподілу: $v_\text{k} = xref'_\text{k} - x_{(\text{k})} = \hat{\mu} + xref_\text{k} \cdot \hat{\sigma} - x_{(\text{k})}$ і які знаходять для нормованої ($m = 0$, $\sigma = 0$) густини розподілу [10, 11].

Загалом цей метод є ваговим методом найменших квадратів [12], згідно з яким шукані параметри положення $\hat{\mu}$ і ширини $\hat{\sigma}$ для зареєстрованої вибірки обчислюють за матричним виразом [10, 11]:

$$\left(\hat{\mu}, \hat{\sigma}\right)^\text{T} = \left(A^\text{T} \cdot W \cdot A\right)^{-1} A^\text{T} \cdot W \cdot X_s = REC \cdot X_s , \qquad (2)$$

де

$$A^\text{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ xref_1 & xref_2 & \cdots & xref_\text{n} \end{pmatrix}$$

є матрицею "зразкових" спостережень; $W = COW^{-1}$ – вагова матриця, яка є зворотною до коваріаційної матриці COV порядкових статистик; $REC = \left(A^\text{T} \cdot W \cdot A\right)^{-1} A^\text{T} \cdot W$ – реконструктивна матриця; X_s – просортовані значення вихідної величини, які обчислюють за виразом

$$X_s = sort(X) . \qquad (3)$$

Зразкові спостереження $xref_\text{k}$ є математичними сподіваннями відповідних порядкових статистик [10–12]:

$$xref_\text{k} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\text{k}(x) dx , \qquad (4)$$

де $p_k(x)$ – густина випадкової змінної x_k, яка описується залежністю [13]

$$p_\text{k}(x) = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \left(F(x)\right)^{\text{k}-1} \left(1 - F(x)\right)^{\text{n}-\text{k}} p(x) , \quad (5)$$

а елементи коваріаційної матриці визначають з обчислення подвійного інтеграла [12, 13]:

$$Cov_{\text{k},l} = \iint_{\text{x}_l > \text{x}_\text{k}} s \cdot z \cdot p_{2_{\text{k},l}}(s,z) ds dz - xref_\text{k} xref_l , \qquad (6)$$

в якому

$$p_{2_{\text{k},l}}(s,z) = C(n,k,l) \cdot \left[F(s)\right]^{\text{k}-1} \times$$
$$\times \left[F(z) - F(s)\right]^{l-\text{k}-1} \left[1 - F(z)\right]^{\text{n}-l} p(s) p(z) \qquad (7)$$

є сумісним розподілом імовірностей k-ї (s) і l-ї (z) порядкових статистик;

$$C(n,k,l) = \frac{n!}{(n-l)! \cdot (l-k-1)! \cdot (k-1)!} \quad [13].$$

При зміні взаємного вмісту рівномірної та нормальної складових густина розподілу (1) може змінюватися від нормального (вміст рівномірної складової нехтовно малий) до рівномірного (вміст нормальної нехтовно малий). Тобто апріорі конкретна форма цього розподілу невідома. Тоді для знаходження найкращих значень параметрів положення $\hat{\mu}$ і ширини $\hat{\sigma}$ вхідні просортовані спостереження порівнюють не з однією послідовністю зразкових спостережень, а з набором *J* (*j*=1, 2, ..., *J*) зразкових спостережень $xref_{1,\,j}$, $xref_{2,\,j}$, $xref_{3,\,j}$, ..., $xref_{n,\,j}$, які відповідають передбачуваним густинам розподілу $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_j(x)$, ..., $p_J(x)$ випадкової величини з розподілом (1) при різних співвідношеннях параметрів *a*, σ_n. На основі такого порівняння знаходять пари шуканих параметрів $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$.

Найкраща пара цих параметрів вибирається з умови найкращого узгодження зареєстрованих спостережень із зразковими, тобто з умови мінімуму незміщеної оцінки дисперсії відхилень:

$$\min\left[S_{R,j}^2=\frac{\left(X_s-A_j\cdot\left(\hat{\mu}_j,\hat{\sigma}_j\right)^{T}\right)^{T}\cdot W_j\cdot\left(X_s-A_j\cdot\left(\hat{\mu}_j,\hat{\sigma}_j\right)^{T}\right)}{n-2}\right].$$

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми

Основною проблемою практичної реалізації методу порядкових статистик є складність обчислення коваріаційної матриці за (2)–(7), оскільки необхідно обчислювати велику кількість подвійних інтегралів від складних двовимірних функцій. Аналітичний розрахунок цих інтегралів можливий лише для певних густин розподілів, наприклад, рівномірного [12]. Для розподілів випадкової величини, які є згорткою нормального і рівномірного розподілів, не існує аналітичного способу обчислення цих інтегралів. Числові методи обчислень таких інтегралів також є проблематичними, які пов’язані як з великими за обсягом обчисленнями, так і з точністю обчислень. Ця проблема стає істотною у випадках, коли кількість спостережень і густина розподілу спостережень можуть бути різними, тобто коли заздалегідь неможливо обчислити необхідну матрицю REC.

З урахуванням вищевикладеного необхідно вирішити такі *завдання*:

• проаналізувати пропозицію спрощеного методу порядкових статистик без розрахунку подвійних інтегралів для обчислення коваріаційної матриці;

• дослідити ефективність запропонованого наближеного методу шляхом статистичних досліджень методом Монте-Карло.

Виклад основного матеріалу

Нормований розподіл суми випадкових величин з нормальним та рівномірним розподілом. Для застосування методу порядкових статистик під час знаходження зразкових спостережень та коваріаційної матриці використовується вираз нормованої густини розподілу випадкової величини $y=\left(x-m_x\right)/\sigma_x$ з $m_x=0$, $\sigma_x=1$. Оскільки у цьому випадку стандартне відхилення суми двох складових має дорівнювати 1:

$$\sigma_x=\sqrt{\sigma_n^2+\sigma_r^2}=\sqrt{\sigma_n^2+\frac{a^2}{3}}=1,$$

то позначивши відношення стандартних відхилень нормальної складової до рівномірної як

$$b=\sigma_n/\sigma_r=\sigma_n\sqrt{3}/a,$$

з умови $\sigma_x=1$ у (1) отримаємо значення параметрів розкиду обох розподілів:

$$\text{для рівномірного}\quad a=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+b^2}};$$

$$\text{для нормального}\quad \sigma_n=\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Тоді нормований розподіл суми складових (1) залежить лише від одного параметра *b* і описується залежністю

$$p_{n,r}\left(y,b\right)=\frac{\sqrt{1+b^2}}{2\sqrt{3}}\times$$
$$\times\left[F\left(y,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+b^2}},\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right)-F\left(y,-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+b^2}},\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right)\right].\quad(8)$$

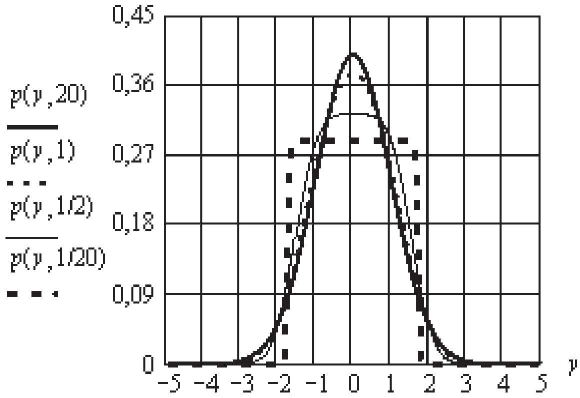

Рис. 1. Густини розподілів згортки нормального та рівномірного для різних відношень стандартних відхилень $b=\sigma_n/\sigma_r$= 20; 1; 1/2; 1/20

На рис. 1 наведено густини розподілів (8) для *b*=20; 1; 1/2; 1/20, з якого можна зауважити, що при збільшенні *b* розподіл прямує до нормального, а при зменшенні – до рівномірного.

Формування матричних компонентів методу зразкових вибірок. Зразкові спостереження, які потрібні для реалізації методу порядкових статистик, розраховані згідно з (4) та (5) із використанням нормованої густини розподілу (8) та функції розподілу

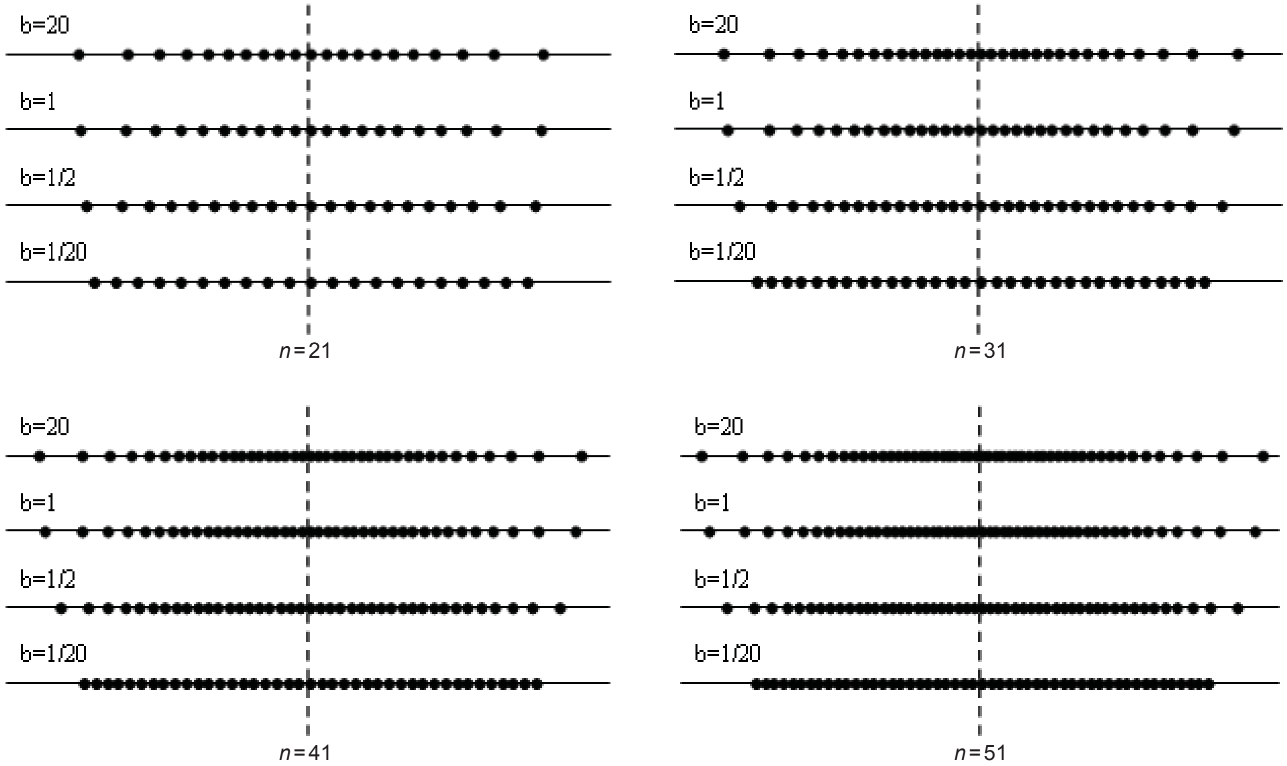

Рис. 2. Приклади наборів зразкових спостережень (n = 21; 31; 41; 51), які відповідають густині розподілу суми нормального та рівномірного при різних вмістах b = 20; 1; 1/2; 1/20

$$F_{\mathrm{n,r}}(y) = \int_{-\infty}^{y} p_{\mathrm{n,r}}(y,b)\,dy$$

для кількості спостережень n = 21; 31; 41; 51 та відношення стандартних відхилень b = 20; 1; 1/2; 1/20. Ці спостереження графічно наведено на рис. 2.

З рис. 2 можна зауважити, що практично при $b \le 1/20$ "зразкові" спостереження є ідеальними спостереженнями з нормального розподілу, а при $b \ge 20$ "зразкові" спостереження відповідають ідеальним спостереженням з рівномірного розподілу.

Коваріаційна матриця. Як було зазначено вище, обчислення коваріаційної матриці за виразами (2)–(7) є дуже складною аналітичною задачею, а числові методи не дають належної точності. Тому для спрощеного розрахунку коваріаційної матриці використаємо асимптотичне наближення для дисперсії і коефіцієнта кореляції між двома порядковими статистиками [13]. Для виведення цих формул використаємо властивості параметрів порядкових статистик. Відомо [13], що квантилі $x_{(\lambda_1)}$ і $x_{(\lambda_2)}$ з вибірки, взятої з генеральної сукупності з розподілом $p(x)$, при великих n мають асимптотично нормальний розподіл з такими параметрами:

$$m_1 = x_{(\lambda,1)}\,;\; m_2 = x_{(\lambda,2)}\,;\; \sigma_1^2 \approx \frac{\lambda_1(1-\lambda_1)}{n\left(p\left(x_{(\lambda_1)}\right)\right)^2}\,;$$

$$\sigma_2^2 \approx \frac{\lambda_2(1-\lambda_2)}{n\left(p\left(x_{(\lambda_2)}\right)\right)^2}\,;\; \rho_{1,2} \approx \sqrt{\frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_2(1-\lambda_1)}}\,, \qquad (9)$$

де m_1, m_2 – математичні сподівання (очікувані значення); σ_1^2, σ_2^2 – дисперсії та $\rho_{1,2}$ – коефіцієнт кореляції обох квантилів; $p\left(x_{(\lambda_k)}\right)$ – значення густини розподілу для $x_{(\lambda_k)}$.

Для $1 \le k \le n$ значення квантиля $\lambda_{\mathrm{k}} = k/(n+1)$, для якого $xref_{j;k} \approx x_{(\lambda,j;k)} = qF_j(\lambda_k) = F_j^{-1}(\lambda_k)$, і тому на підставі залежностей (9) наближені значення коефіцієнтів коваріаційної матриці можуть бути обчислені відповідно до виразу

$$Cov_{\mathrm{k}-1,l-1} \approx \rho_{\mathrm{k}} \cdot \sigma_{\mathrm{k}} \cdot \sigma_l = \frac{1}{n(n+1)^2} \times$$

$$\times \begin{cases} \dfrac{k\cdot(n-l+1)}{p_{\mathrm{n,r}}\left(x_{(\mathrm{k}-1)},b\right)\cdot p_{\mathrm{n,r}}\left(x_{(l-1)},b\right)}, & l \ge k \\[2ex] \dfrac{l\cdot(n-k+1)}{p_{\mathrm{n,r}}\left(x_{(\mathrm{k}-1)},b\right)\cdot p_{\mathrm{n,r}}\left(x_{(l-1)},b\right)}, & l < k \end{cases}.$$

Як бачимо з цього виразу, для наближеного обчислення коваріаційної матриці слід виконати прості арифметичні операції та знати лише аналітичний вираз (8) густини розподілу $p(y,b)$.

Матричні компоненти для розрахунку параметрів положення $\hat{\mu}$ і ширини $\hat{\sigma}$ розподілу та їх стандартної непевності. Наступним кроком є формування реконструктивних матриць REC_{j} з (2), які обчислюють для кожної густини розподілу, тобто заданого значення параметра b та потрібної кількості спостережень n:

$$REC_{\mathrm{j}} = (A_{\mathrm{j}}^{\mathrm{T}} \cdot W_{\mathrm{j}} \cdot A_{\mathrm{j}})^{-1} \cdot A_{\mathrm{j}}^{\mathrm{T}} \cdot W_{\mathrm{j}}\,.$$

За цими матрицями визначаються параметри положення $\hat{\mu}_j$ та ширини $\hat{\sigma}_j$ вхідних упорядкованих спостережень:

$$\left(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j\right)^T = REC_j \cdot X_s ,$$

які відповідають прийнятим густинам розподілу.

Для обчислення стандартної непевності параметра положення $u_A(\hat{\mu}_j)$ та ширини $u_A(\hat{\sigma}_j)$ застосовуємо стандартну методику, використану у зваженому методі найменших квадратів:

$$u_A\left(\hat{\mu}_j\right) = \sqrt{d^2_{0,0_j} \cdot S^2_{R_j}} , \quad u_A\left(\hat{\sigma}_j\right) = \sqrt{d^2_{1,1j} \cdot S^2_{R_j}} , \qquad (10)$$

де $d^2_{0,0_j}$, $d^2_{1,1_j}$ – діагональні елементи матриці D_j; $S^2_{R_j}$ – незміщена оцінка дисперсії відхилень вхідних від зразкових спостережень:

$$S^2_{R_j} = \frac{X_s^T \cdot MS2_j \cdot X_s}{n-2} , \qquad (11)$$

$$MS2_j = W_j \cdot \left(I - A_j \cdot D_j \cdot A_j^T \cdot W_j\right).$$

Тут $MS2_j$ – вагова матриця; I – діагональна одинична матриця розміром $n \times n$;

$$D_j = \left(A_j^T \cdot W_j \cdot A_j\right)^{-1} = \begin{pmatrix} d^2_{0,0_j} & 0 \\ 0 & d^2_{1,1_j} \end{pmatrix},$$

де D_j – дисперсійна матриця розмірністю 2×2 і в разі симетричної густини розподілу генеральної сукупності є діагональною, що свідчить про відсутність кореляції між параметрами положення та ширини дослідженої вибірки [12].

Результати досліджень

Дослідження виконувалися за допомогою методу Монте-Карло за такою послідовністю.

1. Кількість спостережень n=21; 31; 41; 51 при різних відношеннях стандартних відхилень складових b=20; 1; 1/2; 1/20, тобто $j = 1, 2, 3, 4$.

2. Спостереження формували як суму спостережень з нормальним та рівномірним розподілами з параметрами вхідних спостережень: математичне сподівання $m_x = 5$, стандартне відхилення $\sigma_x = 0{,}1$ при різному їх взаємному вмісті b.

3. Кількість реалізацій у методі Монте-Карло M = 10^5 (100 тис.).

4. Для кожного з M наборів $i = 1, \ldots, M$ отриманих випадкових значень вхідної величини після сортування за (3) обчислено значення шуканих параметрів положення $\hat{\mu}_{j,i}$ та ширини $\hat{\sigma}_{j,i}$ вихідної вибірки:

$$\left(\hat{\mu}_{j,i}; \hat{\sigma}_{j,i}\right) = REC_j \cdot X_s^{\langle i \rangle} ,$$

де i – номер вектора вхідних спостережень.

5. Згідно з (11) обчислено незміщені оцінки дисперсії відхилень $S^2_{R_{j,i}}$ вхідної вибірки від зразкових.

6. На основі аналізу $S^2_{R_{j,i}}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) визначено мінімальне значення з $S^2_{R_{N,i}} = \min\left(S^2_{R_{j,i}}\right)$, де N – номер зразкової вибірки, для якої отримали найкраще узгодження вхідних та зразкових спостережень, для якого визначаємо найкращі значення параметрів положення $\hat{\mu}_i = \hat{\mu}_{N,i}$ та ширини $\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_{N,i}$.

7. Згідно з (10) визначено стандартні непевності параметрів положення та ширини за виразом

$$u_A\left(\hat{\mu}_i\right) = \sqrt{S^2_{R_{N,i}} \cdot d_{0,0_N}} , \quad u_A\left(\hat{\sigma}_i\right) = \sqrt{S^2_{R_{N,i}} \cdot d_{1,1_N}} .$$

8. Статистичне опрацювання отриманих результатів:

- обчислюємо середні значення параметра положення та ширини:

$$\bar{\hat{\mu}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \hat{\mu}_i , \quad \bar{\hat{\sigma}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \hat{\sigma}_i ;$$

- стандартне відхилення параметра положення та ширини:

$$s_{\hat{\mu}} = \sqrt{\frac{1}{(M-1)}\sum_{i=1}^{M}\left(\hat{\mu}_i - \bar{\hat{\mu}}\right)^2} ,$$

$$s_{\hat{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{(M-1)}\sum_{i=1}^{M}\left(\hat{\sigma}_i - \bar{\hat{\sigma}}\right)^2} ;$$

- середнє значення похибки параметра положення та ширини:

$$\overline{\Delta_{\hat{\mu}}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\hat{\mu}_i - m_x\right),$$

$$\overline{\Delta_{\hat{\sigma}}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\hat{\sigma}_i - \sigma_x\right);$$

- стандартне відхилення похибки параметра положення (див. таблицю, колонку 4) та ширини (див. таблицю, колонку 7):

$$s_{\Delta_{\hat{\mu}}} = \sqrt{\frac{1}{(M-1)}\sum_{i=1}^{M}\left(\hat{\mu}_i - m_x\right)^2} ;$$

$$s_{\Delta_{\hat{\sigma}}} = \sqrt{\frac{1}{(M-1)}\sum_{i=1}^{M}\left(\hat{\sigma}_i - \sigma_x\right)^2} ;$$

- середнє значення квадратів стандартної непевності параметра положення та ширини:

$$\overline{u_A^2\left(\hat{\mu}\right)} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} u_A^2\left(\hat{\mu}_i\right);$$

$$\overline{u_A^2\left(\hat{\sigma}\right)} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} u_A^2\left(\hat{\sigma}_i\right);$$

Характеристики стандартних непевностей і відхилень похибки параметра положення та ширини при b = 20; 1; 1/2; 1/20 зі стандартним відхиленням m_x = 5 та математичним сподіванням σ_x = 0,1

b	Значення параметра положення			Значення параметра ширини		
	Середня стандартна непевність, $\overline{u_A(\hat{\mu})}$	Теоретичне значення непевності, $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$	Стандартне відхилення похибки, $s_{\Delta_{\hat{\mu}}}$	Середня стандартна непевність, $\overline{u_A(\hat{\sigma})}$	Теоретичне значення непевності, $\frac{\sigma_x}{\sqrt{2n}}$	Стандартне відхилення похибки, $s_{\Delta_{\hat{\sigma}}}$
1	2	3	4	5	6	7
Кількість значень n=21						
b=20	0,02068	0,02182	0,02319	0,01507	0,01543	0,01736
b=1	0,01977		0,02283	0,01420		0,01597
b=1/2	0,01745		0,02123	0,01205		0,01307
b=1/20	0,01335		0,01506	0,00872		0,00734
Кількість значень n=31						
b=20	0,01768	0,01796	0,01858	0,01266	0,01270	0,01390
b=1	0,01702		0,01842	0,01199		0,01276
b=1/2	0,01532		0,01718	0,01032		0,01037
b=1/20	0,01052		0,01151	0,00672		0,00566
Кількість значень n=41						
b=20	0,01558	0,01562	0,01598	0,01106	0,01104	0,01187
b=1	0,01510		0,01583	0,01053		0,01089
b=1/2	0,01382		0,01470	0,00916		0,00889
b=1/20	0,00901		0,00950	0,00566		0,00492
Кількість значень n=51						
b=20	0,01405	0,01400	0,01423	0,00992	0,00990	0,01055
b=1	0,01367		0,01411	0,00947		0,00965
b=1/2	0,01263		0,01302	0,00828		0,00787
b=1/20	0,00804		0,00823	0,00500		0,00450

• середні стандартні непевності параметра положення (див. таблицю, колонку 2) та ширини (див. таблицю, колонку 5):

$$\overline{u_A(\hat{\mu})} = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} u_A^2(\hat{\mu}_i)} = \sqrt{\overline{u_A^2(\hat{\mu})}};$$

$$\overline{u_A(\hat{\sigma})} = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} u_A^2(\hat{\sigma}_i)} = \sqrt{\overline{u_A^2(\hat{\sigma})}};$$

• стандартні відхилення стандартної непевності параметра положення та ширини:

$$\overline{s(u_A(\hat{\mu}))} = \sqrt[4]{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}\left(\overline{u_A^2(\hat{\mu})} - \overline{u_A(\hat{\mu})}\right)^2};$$

$$\overline{s(u_A(\hat{\sigma}))} = \sqrt[4]{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}\left(\overline{u_A^2(\hat{\sigma})} - \overline{u_A(\hat{\sigma})}\right)^2}.$$

Результати обчислень наведено у таблиці та на рис. 3, 4.

На рис. 3*а*, *б* у логарифмічній шкалі наведено залежності середніх значень стандартної непевності та теоретичних значень непевності параметра положення і ширини при b=20; 1; 1/2; 1/20 для кількості спостережень n=21; 31; 41; 51.

На рис. 4*а*, *б* у логарифмічній шкалі наведено залежності стандартних відхилень похибки та теоретичні значення непевності параметра положення і ширини при b=20; 1; 1/2; 1/20 для n=21; 31; 41; 51 спостережень.

Висновки

1. Метод порядкових статистик не вимагає знання апріорі вмісту складових із нормальним та рівномірними розподілами у вхідних спостереженнях. Цей метод на основі порівняння вхідних спостережень із набором зразкових забезпечує автоматичний вибір найкращих (із мінімальною стандартною непевністю) параметрів положення і ширини спостережень.

2. Стандартна непевність шуканих параметрів у досліджуваному методі не може бути гіршою від стандартної непевності середнього значення, при цьому ефективність методу порядкових статистик збільшується при збільшенні впливу рівномірної складової у вхідних спостереженнях.

3. Запропонований метод обчислення коваріаційної матриці, необхідної для реалізації методу порядкових статистик, є простим (виконуються звичайні арифметичні операції) і точним. Важливість спрощення проявляється у тому, що

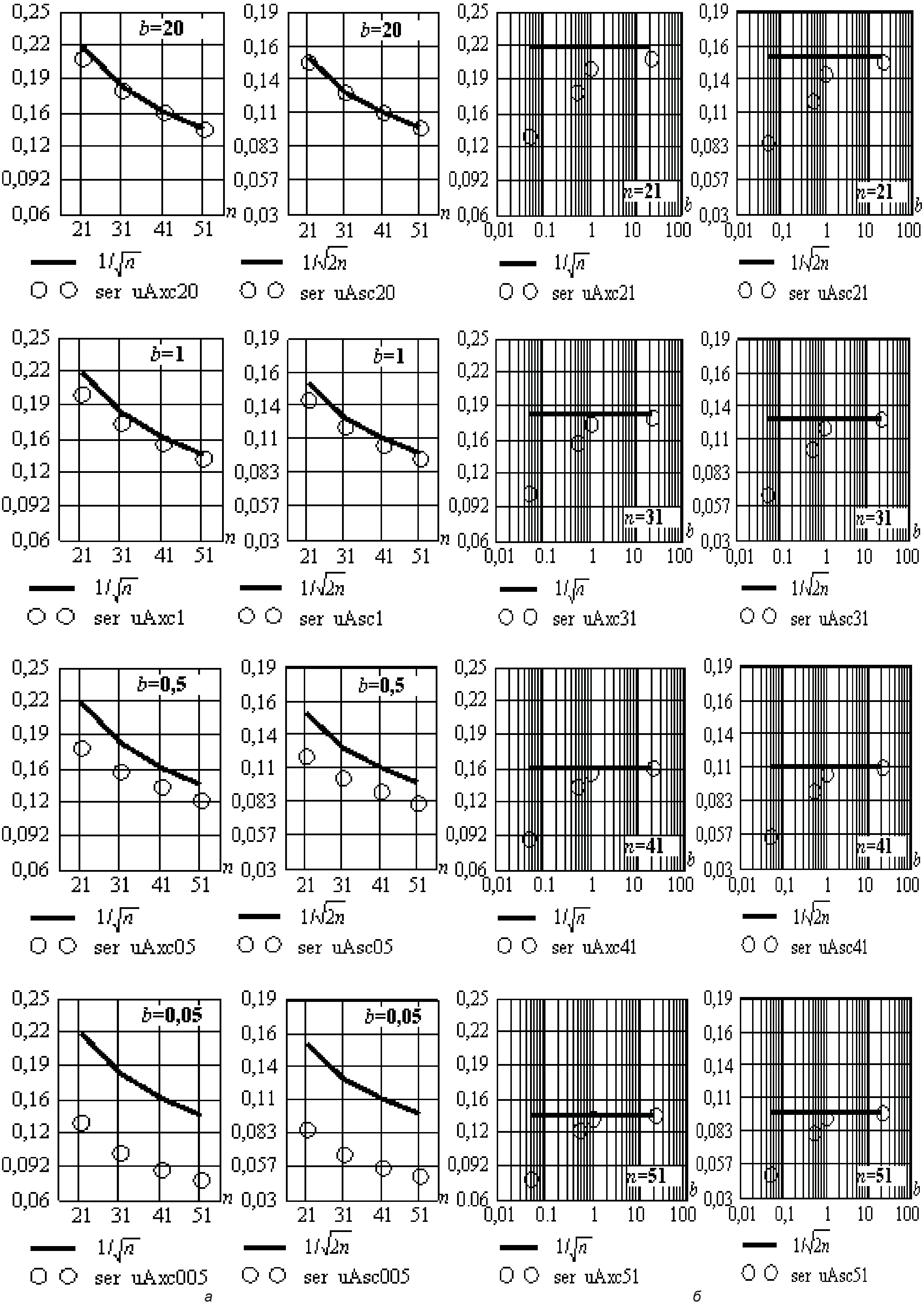

Рис. 3. Залежності середніх значень стандартної непевності та теоретичних значень непевності параметра положення і ширини при b = 20; 1; 1/2; 1/20 для кількості спостережень n = 21; 31; 41; 51

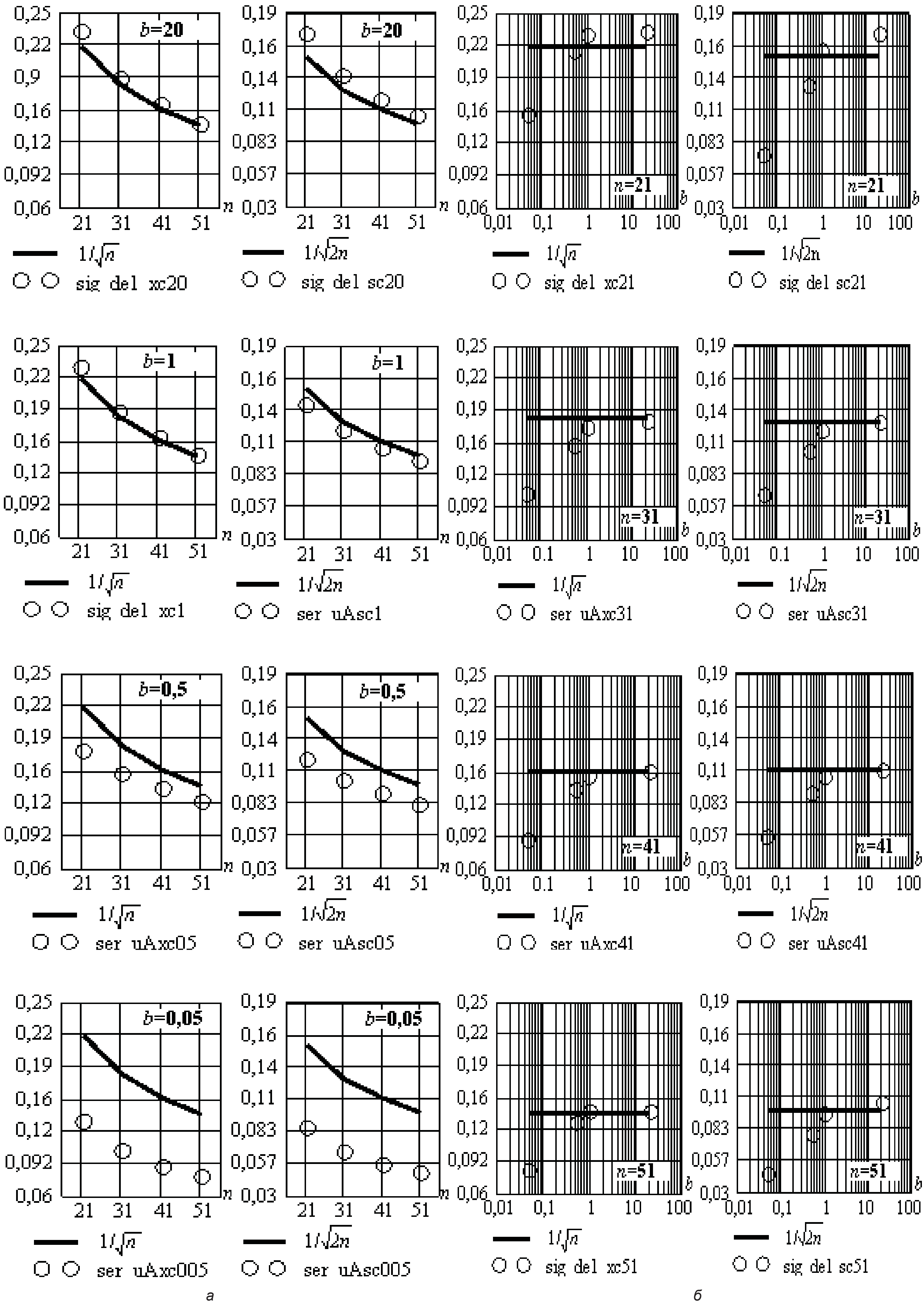

Рис. 4. Залежності стандартних відхилень похибки та теоретичні значення непевності параметра положення і ширини при b = 20; 1; 1/2; 1/20 для n = 21; 31; 41; 51 спостережень

коли кількість спостережень наперед не є відомою і неможливо заздалегідь підготувати необхідні матричні компоненти для опрацювання, вони мають бути розраховані в самому процесі опрацювання спостережень.

4. Проведені дослідження методом Монте-Карло підтвердили ефективність цього методу.

Список літератури

1. Guide of the Expression of Uncertainty in Measurement. – Switzerland: International Organisation for Standardisation, 1993, 1995, 2007. – P. 1–13.
2. Метрологія. Терміни та визначення: ДСТУ 2681-94. – [Чинний від 1995-01-01]. – К.: Держстандарт України, 1994. – (Державний стандарт України).
3. Закон України "Про метрологію та метрологічну діяльність" від 5 червня 2014 р. № 1314-VII [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/1314-18
4. *Зубков М.* Сучасний англо-український та українсько-англійський словник / М. Зубков, В. Мюллер. – Харків: Школа, 2005. – 768 с.
5. *Дорожовець М.* Опрацювання результатів вимірювань: навч. посібник для студентів / М. Дорожовець. – Львів: Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2007. – 624 с.
6. The coverage factor in a Flatten–Gaussian distribution / J. Blázquez, A. García-Berrocal, C. Montalvo, M. Balbás // Metrologia. – 2008. – V. 45. – P. 503–506.
7. *Dietrich C.F.* Uncertainty, Calibration and Probability. The Statistics of Scientific and Industrial Measurement / C.F. Dietrich. – Second Edition. – 1991. – The Adam Hilger Series on Measurement Science and Technology. – P. 535.
8. *Fotowicz P.* Metody obliczania współczynnika rozszerzenia w oparciu o splot rozkładu prostokątnego z normalnym / P. Fotowicz // PAK. – 2004. – № 4. – S. 13–16.
9. *Fotowicz P.* Wykorzystanie rozkładu płasko-normalnego przy obliczaniu niepewności pomiaruю / P. Fotowicz // PAK. – 2011. – № 6. – S. 595–598.
10. *Дорожовець М.* Дослідження застосування зразкових вибірок для оцінювання результату вимірювання та його стандартної непевності / М. Дорожовець // Відбір і обробка інформації. – 2008. – Вип. 28 (104).
11. *Дорожовець М.* Опрацювання результатів спостереження на основі наближеного методу порядкових статистик/ М. Дорожовець, І. Попович // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2014. – № 75. – С. 8–12.
12. *Kendal M.G.* The Advanced Theory of Statistics / M.G. Kendal, A. Stuart. – London: Charles Griffin & Co. Ltd., 1966.
13. *Fisz M.* Probability Theory and Mathematical Statistics / M. Fisz. – London: John Willey & Sons, 1963.

<u>Від редакції</u>

У вищенаведеній статті використовується ненормативний термін "непевність" замість терміна "невизначеність", установленого ДСТУ 2681-94 "Метрологія. Терміни та визначення" і Законом України "Про метрологію і метрологічну діяльність".

Оскільки автори наполягають на цьому терміні, редакція погодилася зберегти його, але у подальшому просить використовувати нормативну термінологію.