УДК 389.1

ВИЗНАЧЕННЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ ЗА ЗМІНОЮ ПРОСТОРУ

(у порядку обговорення)

***Г.К. Ленюк**, кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник АТ “Інститут паперу”, м. Київ*

Подається ідея визначення похибок вимірювання як різниці розмірів реального об’єкта з номінальними параметрами та уявного з виміряними параметрами, для чого проводиться перетворення координат простору.

The idea of determination of measurement errors as a difference of sizes of the real object with rated parameters and for visualized object with measured parameters is considered; for this purpose the transformation of space coordinates is accomplished.

Виміряні параметри реального об’єкта, звісно, відрізняються від їх номінальних значень, і можна вважати, що реальний об’єкт перетворюється на уявний з виміряними параметрами. Отже, йдеться про зміну форми простору, а разом із тим — системи координат, що пов’язана з реальним об’єктом.

Знаючи формули переходу координат реального об’єкта до координат уявного і навпаки, можна віднайти шукані результати, зокрема, визначити похибки вимірювання, за умови, що форма реального об’єкта є відомою, оскільки номінальні значення його параметрів невідомі.

Цієї умови достатньо і для досягнення єдності розв’язку, що, як далі побачимо, є вагомим аргументом.

З урахуванням прагматичної логіки, пропонується вихідною системою реального об’єкта прийняти прямокутну декартову [1] систему кординат $\Sigma(0, x, y, z)$ (рис. 1), а деформованою системою уявного об’єкта — косокутну систему $\Sigma'(0, x', y', z')$ зі спільним початком (рис. 2) координат і контраваріантними координатами.

Припускається, що осі x' і $'$ утворюються поворотом у площині $x0y$ осей x і y на кут φ та α відповідно, а вісь z' утворюється поворотом у площині $y0z$ осі z на кут γ.

Прямим проектуванням [1] можна обчислити положення точки $P = (x, y, z)_\Sigma = (x', y', z')_{\Sigma'}$ у системі Σ за формулами:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\alpha\,;$$

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\alpha + z'\sin\gamma\,; \qquad (1)$$

$$z = z'\cos\gamma\,.$$

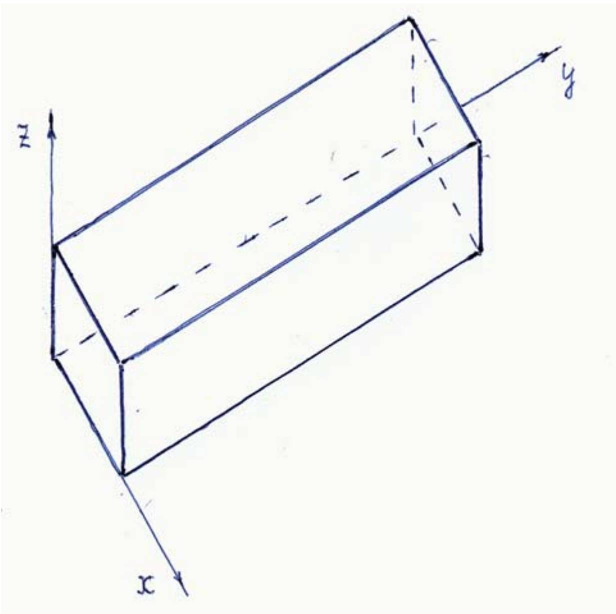

Рис. 1. Прямокутний паралелепіпед із номінальними параметрами у декартовій системі координат ∑(0, *x*, *y*, *z*)

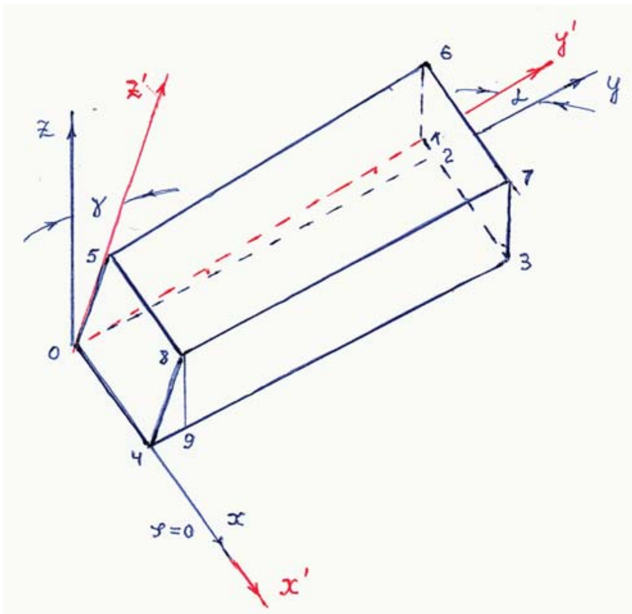

Рис. 2. Деформований паралелепіпед із виміряними параметрами у косокутній системі координат ∑´(0, *x*´, *y*´, *z*´)

Матрицею системи (1) є

$$B=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\alpha & 0\\ \sin\varphi & \cos\alpha & \sin\gamma\\ 0 & 0 & \cos\gamma\end{pmatrix}$$

з визначником $\det B=\Delta=\cos\gamma\cos(\varphi-\alpha)$ і з оберненою матрицею

$$B^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma\\ -\sin\varphi\cos\gamma & \cos\varphi\cos\gamma & -\cos\varphi\sin\gamma\\ 0 & 0 & \cos(\varphi-\alpha)\end{pmatrix}. \quad (2)$$

Отже, у векторній формі положення точки *P* знайдеться у системі Σ

$$X=BX' \quad (3)$$

і у системі Σ'

$$X'=B^{-1}X, \quad (4)$$

де

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix};\; X'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}.$$

Примітка. Якщо прийняти додатним кут повороту γ у протилежному напрямку (рис. 2), то у формулі для *y* системи (1) значення $z'\sin\gamma$ змінюється на $-z'\sin\gamma$, у матриці *B* $\sin\gamma$ змінюється на $-\sin\gamma$, у третьому стовбці матриці B^{-1} $-\sin\alpha\sin\gamma$ та $-\cos\varphi\sin\gamma$ змінять знаки на протилежні.

За формулами (3) і (4) знаходять відповідні координати точок виміряного (уявного) об'єкта у системах Σ і Σ', після чого, покладаючи $\varphi=0$, $\alpha=0$, $\gamma=0$, за (4) обчислюють імовірні значення номінальних координат точок реального об'єкта у системі Σ.

Різниця відповідних координат точок уявного та реального об'єктів відповідатиме похибці вимірювання, а в необхідних випадках, в умовах системи координат Σ, можна скористатися формулою довжини відрізка, що виражена через координати його кінців *i, j*:

$$l_{ij}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}\,.$$

Неважко помітити (2), що за умов $\varphi=0$, $\alpha=0$, $\gamma=0$ матриця B^{-1} перетворюється на одиничну, і координати точки в системі Σ чисельно дорівнюватимуть її координатам у системі Σ', що спрощує обчислювальні викладки, але зобов'язує, з урахуванням $\varphi=0$, $\alpha=0$, $\gamma=0$, провести аналіз різниць координат і визначитися із самими координатами в системі Σ.

Наведемо приклад.

Обміряно (рис. 2) прямокутний паралелепіпед з результатами:

$$a=l_{04}=25{,}000;\; l_{58}=25{,}000;$$

$$h=l_{16}=l_{37}=l_{89}=20{,}000;$$

$$l=l_{02}=l_{43}=100{,}000;$$

$$l_{78}=99{,}700;\; l_{56}=99{,}700;$$

$$l_{67}=l_{13}=25{,}200.$$

З огляду на припущення і будову системи Σ' вісь y' проходить через ребро 01, вісь x' збігається з віссю *x,* ребро 56 паралельне осі y', ребра 78 і 43 паралельні осі *y*, тому $l_{23}=25{,}000$, $l_{12}=25{,}200-25{,}000=0{,}200$ і довжина ребра 56 становить в уявному об'єкті

$$l_{56}=\sqrt{99{,}7^2+0{,}2^2}=99{,}7002\,,$$

ребра 01

$$l_{01}=\sqrt{100^2+0{,}2^2}=100{,}0002\,.$$

Оскільки $l_{49}=100{,}000-99{,}700=0{,}300$, довжина ребра 58 становить

$$l_{58}=25{,}000+0{,}2\frac{0{,}3}{100}=25{,}0006\,.$$

Для використання апарата (3), (4) необхідно віднайти тригонометричні функції, що входять до системи (1).

Це досягається або використанням рівнянь (1) для деяких "опорних" точок об'єкта, або виходячи із геометричних розмірів об'єкта.

$$\mathrm{tg}\gamma=\frac{0{,}3}{20}=0{,}0150\,;\; \cos^2\gamma=\sqrt{\frac{1}{1+0{,}015^2}}=0{,}99977505\,;$$

$$\cos\gamma=0{,}999887519\,;\; \sin\gamma=0{,}014998333\,;$$

$$l_{48}=\frac{20}{\cos\gamma}=20{,}00225\,.$$

Для абсциси точки 1 (1) отримаємо $x_1=-0{,}2=0\cdot\cos\varphi-100{,}0002\sin\alpha\rightarrow\sin\alpha=0{,}0020$, $\cos\alpha=0{,}999998$.

Враховуючи, що $\varphi=0$, знайдемо визначник матриці *B:* $\Delta=\cos\gamma\cos(\varphi-\alpha)=\cos\gamma\cos\alpha=0{,}999887519\times 0{,}999998=0{,}999885519$.

За формулами (3), (4) обчислимо координати точок паралелепіпеда в системах Σ і Σ' і зведемо їх у табл. 1.

Враховуючи, що координати точок у системі Σ' за умов $\varphi=0$, $\alpha=0$, $\gamma=0$ дорівнюють відповідним координатам реального об'єкта в системі Σ, Таблиця 1

Номер точки	Координати точки паралелепіпеда x_i, y_i, z_i у системі координат $\sum$			Координати точки паралелепіпеда x_i', y_i', z_i' у системі координат $\sum'$			Різниці координат		
1	–0,2;	100;	0	0;	100,0002;	0	–0,2;	–0,002;	0
2	0;	100;	0	0,2;	100,0002;	0	–0,2;	–0,002;	0
3	25;	100;	0	25,2;	100,0002;	0	–0,2;	–0,002;	0
4	25;	0;	0	25;	0;	0	0;	0;	0
5	–0,0006;	0,3;	20	–0,0006;	0;	20,00225	0;	0,3;	–0,00225
6	–0,2;	100;	20	–0,0006;	99,7002;	20,00225	–0,1994;	0,2998;	–0,00225
7	25;	100;	20	25,1994;	99,7002;	20,00225	–0,1994;	0,2998;	–0,00225
8	25;	0,3;	20	25;	0;	20,00225	0;	0,3;	–0,00225

Примітка. Збіг абсциси точки 5 в системах Σ і Σ′ пояснюється так: за будовою об'єкта (рис. 2) $x_5 = -0,2(0,3/100) = -0,0006$ мм, а за контраваріантністю проектування на площину *x'0 y'* ведеться паралельно осі *z'*, у нашому випадку у площині, паралельній площині *z0y*, отже, супроводжується відхиленням проекції точки 5 на величину порядку $x_5' = -0,3 \cdot \sin\alpha = -0,3 \cdot 0,0020 = -0,0006$ мм.

обчислимо різниці відповідних координат (табл. 1), які є похибками вимірювання.

Інтерпретуємо результати вимірювання: для точок 1, 2, 3, а також 6, 7 похибки абсцис компенсуються переносом точки 1 у положення 2 (і відповідно точки 6 на відстань 0,2 мм у напрямку, паралельному *0x*), що означає насправді $l_{67} = l_{13} = 25,000$ мм; точка 5 при цьому переміститься на 0,0006 мм у напрямку, паралельному *0x*; для точок 5, 8 похибки ординат компенсуються переносом їх на відстань 0,3 мм у напрямку осі *y* до координатної площини *x0z*, що означає насправді $l_{56} = l_{78} = 100,000$ мм, $l_{05} = l_{48} = l_{89} = l_{16} = l_{37} = 20,000$ мм і забезпечує прямокутність паралелепіпеда; всі інші різниці координат є похідними, отриманими внаслідок обчислення, або є видатками контраваріантності і тому обертаються на нуль.

У результаті ймовірні значення довжини ребер прямокутного паралелепіпеда набирають вигляду (*a, l, h*) = (25,000; 100,000; 20,000).

Виникає питання, чи можливо отримати інші значення ребер прямокутного паралелепіпеда, наприклад, (25,200; 99,700; 20,000), тобто, чи має місце єдність розв'язку.

Для відповіді на це питання розглянемо наш об'єкт у косокутній системі координат (рис. 3) $\Sigma'(3, x', y', z')$ з початком координат у точці 3.

За формулами (3), (4), як і раніше, обчислимо координати точок паралелепіпеда в системах Σ і Σ′ і зведемо їх у табл. 2.

Інтерпретуємо результати вимірювання, враховуючи, що координати точок у системі Σ′ за умов $\varphi = 0$, $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ дорівнюють відповідним координатам реального об'єкта в системі Σ.

Вимога $\alpha = 0$ досягається переносом точки 1 у положення 2 (і відповідно точки 6 на відстань 0,2 мм у напрямку, паралельному *0x*), що означає насправді $l_{67} = l_{13} = 25,000$ мм.

Для точок 5, 8 похибки ординат компенсуються переносом їх на відстань 0,3 мм у напрямку осі *y* від координатної площини *x0z*, що означає насправді $l_{56} = l_{78} = 100,000$ мм, $l_{05} = l_{48} = l_{89} = l_{16} = l_{37} = 200,000$ мм і забезпечує $\gamma = 0$ і прямокутність паралелепіпеда; всі інші різниці координат є похідними, отриманими внаслідок обчислення, або є видатками контраваріантності і тому обертаються на нуль.

Результати збігаються з отриманими вище, і можна твердити, що має місце єдність розв'язку.

Вихідними системами координат можуть бути системи необов'язково з прямими координатними кутами, теорію їх перетворення [1] у будь-які інші прямолінійні системи розроблено, а також відомий зв'язок координат точки відносно узгодже-

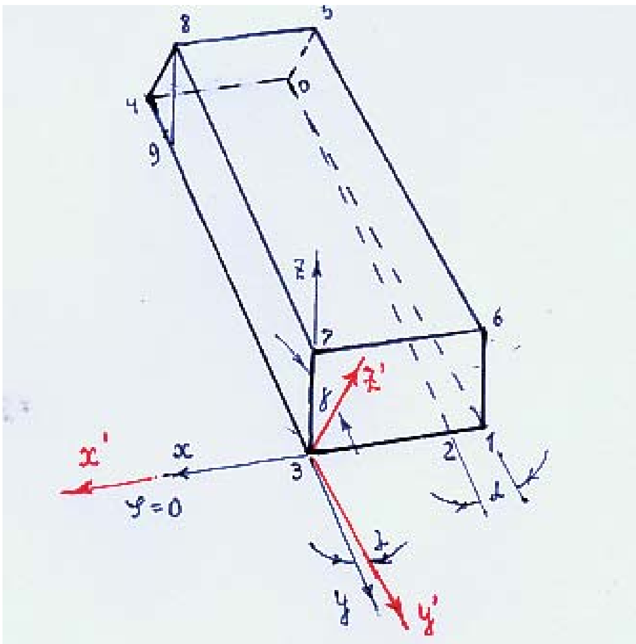

Рис. 3. Деформований паралелепіпед із виміряними параметрами у косокутній системі координат $\sum'(3,\ x',\ y',\ z')$

Таблиця 2

Номер точки	Координати точки паралелепіпеда x_i, y_i, z_i у системі координат $\sum$			Координати точки паралелепіпеда x_i', y_i', z_i' у системі координат $\sum'$			Різниці координат		
0	–25;	–100;	0	–25;	–100,0002;	0	0;	0,0002;	0
1	–25,2;	0;	0	–25,2;	0;	0	0;	0;	0
2	–25;	0;	0	–25;	0;	0	0;	0;	0
3	0;	0;	0	0;	0;	0	0;	0;	0
4	0;	–100;	0	0;	–100,0002;	0	0;	0,0002;	0
5	–25,0006;	–99,7;	20	–25,2006;	–100,0002;	20,00225	0,2;	0,3002;	–0,00225
6	–25,2;	0;	20	–25,0006;	–0,3;	20,00225	0,0006;	0,3;	–0,00225
7	0;	0;	20	–0,0006;	–0,3;	20,00225	0,0006;	0,3;	–0,00225
8	0;	–99,7;	20	–0,2000;	–100,0002;	20,00225	0,2;	0,3002;	–0,00225

них декартової, циліндричної і сферичної систем координат.

Різноманітні можливості методу поки що залишаються неозорими, але можна твердити, що ним можна скористатися у деяких випадках високоточних вимірювань і спірних питань.

Список літератури

1. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. –544 с.