



## Математическая модель вибрационного сенсора динамической вязкости

О. Ю. Олейник, Ю. К. Тараненко

*Украинский государственный химико-технологический университет, кафедра компьютерно-интегрированных технологий и метрологии, пр. Гагарина, 8, 49005, Днепр, Украина  
oleinik\_o@ukr.net*

### Аннотация

Статья посвящена решению задачи повышения точности контроля и измерения динамической вязкости жидкости вибрационным методом. Актуальной задачей сегодня является обеспечение дистанционного контроля вязкости растворов в реальных промышленных технологических процессах.

Большинство существующих вискозиметров являются приборами преимущественно лабораторного класса и по ряду причин не могут выполнить поставленную задачу. Наиболее точными средствами измерений динамической вязкости являются вибрационные амплитудные и частотные сенсоры динамической вязкости, которые контактируют с жидкостью поверхностью чувствительного элемента (резонатора) в виде колеблющегося стержня или пластины.

Большинство теоретических исследований таких резонаторов основано на аналитическом описании, которое ограничивается случаем бесконечной пластины, совершающей гармонические колебания в бесконечной вязкой среде. Такой подход не позволяет корректно описать поведение датчика в реальных условиях его работы. В статье получена математическая модель сенсора динамической вязкости жидкости с чувствительным элементом в виде трубчатого одинарного камертона, ветви которого заполнены контролируемой жидкостью. В основу математической модели положено уравнение равновесия согласно принципу Даламбера.

Приведены основные соотношения для определения эквивалентной массы ветви камертона, эквивалентной жесткости ветви камертона и эквивалентного коэффициента линейного трения в ветви камертона. Полученные соотношения полностью подтверждаются теорией колебаний и теорией деформации твердых тел в линейной области, могут быть использованы при разработке вибрационного метода контроля вязкости по декременту затухания камертона или путем контроля добротности.

**Ключевые слова:** динамическая вязкость, камертон, эквивалентная масса, жесткость.

Получено: 05.10.2017

Отредактировано: 10.11.2017

Одобрено к печати: 17.11.2017

### Введение

Большинство существующих вискозиметров являются приборами преимущественно лабораторного класса и по ряду причин не могут обеспечить дистанционный контроль вязкости растворов в реальных промышленных технологических процессах [1]. Виброчастотные вискозиметры преобразуют измеряемый параметр в частотно-модулированный выходной сигнал без промежуточных преобразователей, что обеспечивает высокую точность измерения в нормальных условиях эксплуатации.

Широкому промышленному использованию вибрационных вискозиметров препятствуют:

- несовершенство конструкции и связанные с этим низкие метрологические показатели и надежность [2];

- невозможность применения приборов в недоступных для обслуживания зонах и при наличии вредных влияющих факторов (агрессивности и загазованности окружающей среды, химической токсичности и радиоактивности растворов, повышенной температуры, влажности и др.) [1];

- существенная дополнительная погрешность приборов от изменения температуры и уровня контролируемой среды [3].

Возрастающие требования к совершенству средств измерений заставляют исследователей искать новые методы решения измерительных задач. Задача точного контроля и измерения динамической вязкости жидкости с погрешностью менее 0,1 % является актуальной и до настоящего времени нерешённой задачей даже для ньютоновских жидкостей.

**Анализ литературных данных и постановка проблемы**

Наиболее точными инструментальными средствами измерений динамической вязкости являются вибрационные амплитудные и частотные сенсоры динамической вязкости, которые контактируют с жидкостью поверхностью чувствительного элемента в виде колеблющегося стержня или пластины. Их точность (2–5 %) существенно ограничена вследствие волновых процессов, возникающих в жидкости и вносящих неинформативный параметр в результаты контроля [4].

Сенсоры с заполненными жидкостью резонаторами малочисленны и конструктивно несовершенны из-за потерь энергии в местах крепления, что снижает добротность колебательной системы, которая и является мерой динамической вязкости [5].

В работе [6] выполнена серия расчетов колебаний вибрационного датчика в вязкой жидкости. В расчетах варьировалась плотность (в диапазоне от 1 до 1113 кг/м<sup>3</sup>) и вязкость жидкой среды (в диапазоне от 0,0002 до 0,02 Па·с). Авторы показали, что, несмотря на практически однородное распределение вынуждающей силы, в датчике возбуждаются различные моды колебаний, а в окружающей датчик жидкости возникает довольно сложная картина периодически сменяющих друг друга акустических волн сжатия и растяжения. Пространственное распределение и характер нестационарного поведения локальных величин (вектора деформации, вектора скорости жидкости, давления и т. д.) для других вариантов расчета в целом качественно аналогичны, естественно, с учетом того, что в более плотных и вязких жидкостях амплитуда и добротность колебаний датчика уменьшаются (рис. 1).

Из приведенных данных [6] следует, что минимальная пучность, а следовательно и добротность, достигается на первой основной форме колебаний ветвей камертона.

Известно, что прецизионными являются одинарные камертонные резонаторы, в которых за счёт компенсации энергии в местах крепления ветвей добротность может достигать 1000 [7]. В ряде работ

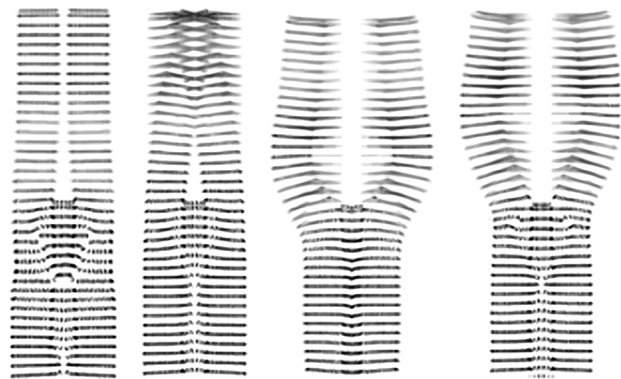


Рис. 1. Распределение вектора деформации в центральном сечении датчика в различные моменты времени по данным [6]

описаны теоретические исследования таких резонаторов. В большинстве случаев [8, 9] эти исследования основаны на аналитическом описании, которое ограничивается случаем бесконечной пластины, совершающей гармонические колебания в бесконечной вязкой среде. При таком подходе невозможно корректно описать поведение датчика в реальных условиях его работы, поэтому разработка математической модели сенсора динамической вязкости жидкости с чувствительным элементом в виде трубчатого одинарного камертона, ветви которого заполнены контролируемой жидкостью, является актуальной задачей.

**Цель и задачи исследования**

Целью работы является разработка математической модели сенсора динамической вязкости с чувствительным элементом в виде трубчатого одинарного камертона, ветви которого заполнены контролируемой жидкостью.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- получить дифференциальное уравнение трубчатого камертона, заполненного жидкостью, с учетом принципа Даламбера;
- выполнить приведение к длине резонатора и получить основные эквивалентные параметры сосредоточенной модели.

**Построение математической модели на принципе Даламбера**

Рассмотрим консольно защемленный однородный стержень сечением  $S_c$  с полостью одинакового сечения  $S_{ж}$ , заполненной однородной вязкой жидкостью (рис. 2).

Для жидкости касательное напряжение  $\tau$  рассчитывают по следующей формуле [10]:

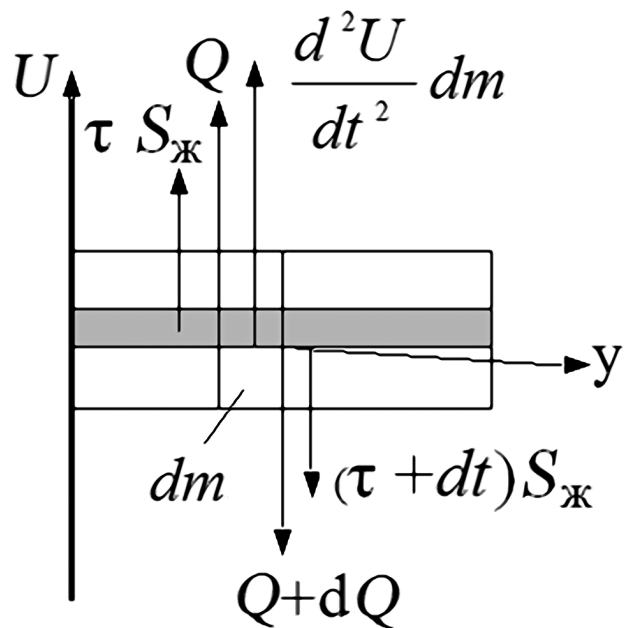


Рис. 2. Расчётная схема математической модели ветви камертонного прецизионного сенсора динамической вязкости жидкости

$$\tau = k_0 \frac{d^2 u}{dy dt},$$

где  $k_0$  — коэффициент вязкости жидкости.

На расстоянии  $y$  от точки заземления выделим участок протяженностью  $dy$  и покажем поперечные силы  $Q$  стержня и касательные силы жидкости, действующие в сечениях этого элемента (рис. 2).

Составим уравнение равновесия согласно принципу Даламбера [10]:

$$\gamma_c S_c + \gamma_{ж} S_{ж} \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{d\theta}{dy} + S_{ж} \frac{dt}{dy} = 0,$$

где  $\gamma_c$  — плотность стержня;  $S_c$  — площадь сечения стержня;  $\gamma_{ж}$  — плотность жидкости;  $S_{ж}$  — площадь сечения жидкости;  $U$  — амплитуда колебания на первой гармонике на длине стержня  $l$ .

Для каждого конца стержня зададим следующие граничные условия:

1) заземлённый конец, когда прогибы и углы поворота равны нулю:

$$U(y) = 0 \text{ при } y = 0;$$

$$\frac{dU}{dy} = 0 \text{ при } y = 0;$$

2) свободный конец (при  $y = l$ ), когда изгибающий момент равен нулю, поперечная и продольная перерезывающие силы равны нулю:

$$\frac{dU}{dy} = 0 \text{ при } y = l;$$

$$\frac{d^3 U(y)}{d^2 y} = 0 \text{ при } y = l.$$

С учётом граничных условий имеем

$$E_c J_c \frac{d^4 U}{dy^4} + k_0 S_{ж} \frac{d^3 U}{dy^3 dt} + (\gamma_c S_c + \gamma_{ж} S_{ж}) \frac{d^2 U}{dt^2} = 0, \quad (1)$$

где  $E_c$  — комплексный модуль упругости материала стержня;  $J_c$  — статический момент инерции стержня.

Решение ищем в виде выражения вида

$$U(y, t) = \sum U_r(y) \cdot S_r(t).$$

Для первой формы колебаний ( $r=1$ ) подставим решение в исходное уравнение (1).

В результате имеем так называемую невязку  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = E_c J_c \frac{d^4 U}{dy^4} S_1 + k_0 S_{ж} \frac{d^2 U_1}{dy^2} \frac{dS_1}{dt} + (\gamma_c S_c + \gamma_{ж} S_{ж}) U_1 \frac{d^2 S_1}{dt^2}. \quad (2)$$

Перейдем к линейному пространству, для чего невязку  $\varepsilon$  выражения (2) с координатой амплитуды первой гармоники  $U_1$  сведем к условию

$$\int_0^l \varepsilon U_1 dy = 0$$

и в развернутой форме:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 S_1}{dt^2} (\gamma_c S_c + \gamma_{ж} S_{ж}) \int_0^l U_1^2 dy + \\ & + \frac{dS_1}{dt} k_0 S_{ж} \int_0^l U_1 \frac{d^2 U_1}{dy^2} dy + \\ & + S_1 E_c J_c \int_0^l \frac{d^4 U}{dy^4} U_1 dy = 0. \end{aligned}$$

С учетом приведения системы к концу стержня, эквивалентные параметры сосредоточенной модели имеют следующий вид:

$$m_3 = \frac{\gamma_c S_c + \gamma_{ж} S_{ж}}{U_1^2(l)} \int_0^l U(y) dy = 0,25 m,$$

где  $m$  — масса стержня резонатора с жидкостью;

$$c_3 = \frac{E_c J_c}{U_1^2(l)} \int_0^l \frac{d^4 U_1}{dy^4} U_1 dy = \frac{E_c J_c \lambda_0^4}{4l^3} = 3,09 E_c J_c l^{-3};$$

$$h_3 = \frac{k_0 S_{ж}}{U_1^2(l)} \int_0^l U_1 \frac{d^2 U_1}{dy^2} dy = 0,054 k_0 S_{ж} l^{-1}.$$

Соотношения, полученные из приведенной математической модели, имеют вид:

$m_3 = 0,25 m$  — эквивалентная масса ветви камертона;

$c_3 = 3,09 E_c J_c l^{-3}$  — эквивалентная жёсткость ветви камертона;

$h_3 = 0,054 k_0 S_{ж} l^{-1}$  — эквивалентный коэффициент линейного трения в ветви камертона.

## Выводы

В работе получены основные соотношения для определения эквивалентной массы ветви камертона, эквивалентной жёсткости ветви камертона и эквивалентного коэффициента линейного трения в ветви камертона. Полученные соотношения полностью подтверждаются теорией колебаний и теорией деформации твёрдых тел в линейной области, могут быть использованы при разработке вибрационного метода контроля вязкости по декременту затухания камертона или путём контроля добротности.

# Математична модель вібраційного сенсора динамічної в'язкості

О.Ю. Олійник, Ю.К. Тараненко

Український державний хіміко-технологічний університет, кафедра комп'ютерно-інтегрованих технологій і метрології,  
пр. Гагаріна, 8, 49005, Дніпро, Україна  
oleinik\_o@ukr.net

## Анотація

Статтю присвячено вирішенню завдання підвищення точності контролю та вимірювання динамічної в'язкості рідини вібраційним методом. Актуальним завданням наразі є забезпечення дистанційного контролю в'язкості розчинів у реальних промислових технологічних процесах.

Більшість існуючих віскозиметрів є приладами переважно лабораторного класу і з ряду причин не можуть виконати поставлене завдання. Найбільш точними засобами вимірювання динамічної в'язкості є вібраційні амплітудні і частотні сенсори динамічної в'язкості, які контактують із рідиною поверхнею чутливого елемента (резонатора) у вигляді стрижня або пластини, які коливаються.

Більшість теоретичних досліджень таких резонаторів ґрунтується на аналітичному описі, який обмежується випадком нескінченної пластини, що здійснює гармонічні коливання в нескінченному в'язкому середовищі. Такий підхід не дозволяє коректно описати поведінку давача в реальних умовах його роботи. У статті отримано математичну модель сенсора динамічної в'язкості рідини із чутливим елементом у вигляді трубчастого одинарного камертона, гілки якого заповнено контрольованою рідиною. В основу математичної моделі покладено рівняння рівноваги згідно із принципом Даламбера.

Наведено основні співвідношення для визначення еквівалентної маси гілки камертона, еквівалентної жорсткості гілки камертона та еквівалентного коефіцієнта лінійного тертя в гілці камертона. Отримані співвідношення повністю підтверджуються теорією коливань і теорією деформації твердих тіл у лінійній області, можуть бути використані при розробці вібраційного методу контролю в'язкості за декрементом загасання камертона або шляхом контролю добротності.

**Ключові слова:** динамічна в'язкість, камертон, еквівалентна маса, жорсткість.

## Mathematical model of vibration sensor for dynamic viscosity

O.Yu. Oliynyk, Yu.K. Taranenko

Ukrainian State University of Chemical Technology, Department of Computer-Integrated Technologies and Metrology, Gagarina Ave., 8, 49005, Dnipro, Ukraine  
oleinik\_o@ukr.net

## Abstract

The article is devoted to the solution of the problem of increasing the accuracy of control and measurement of the dynamic viscosity of a liquid by the vibrational method. The critical task for today is to provide remote monitoring of the viscosity of solutions in real industrial technological processes.

Most of the existing viscometers are instruments predominantly of the laboratory class and for a number of reasons cannot fulfill the assigned task. The most accurate measuring instruments for dynamic viscosity are vibrational amplitude and frequency dynamic viscosity sensors that contact the liquid with the surface of sensitive element (resonator) in the form of an oscillating rod or plate.

Most theoretical studies of such resonators are based on an analytical description, which is limited to the case of an infinite plate performing harmonic oscillations in an infinite viscous medium. Such an approach does not provide an opportunity to describe correctly the behavior of the sensor in real conditions of its operation. Therefore, the article is devoted to the development of a mathematical model of the dynamic viscosity sensor of a liquid with a sensitive element in the form of a tubular single tuning fork, the prongs of which are filled with a controlled liquid. The mathematical model is based on the equilibrium equation according to the d'Alembert's principle.

The article presents the main relationships for determining the equivalent mass of the prong of the tuning fork, equivalent rigidity of the prong of the tuning fork and the equivalent coefficient of linear friction in the prong of the tuning fork. The obtained relationships are completely confirmed by the theory of oscillations and the theory of deformation of solids in the linear region, and can be used in the development of a vibration control method for viscosity by the damping ratio of the tuning fork or by Q-control.

**Keywords:** dynamic viscosity, tuning fork, equivalent weight, hardness.

Список литературы

1. Зацерклянный О. В. Вибрационные плотнометры газов и жидкостей. *Инновации на основе информационных и коммуникационных технологий*. 2011. № 1. С. 340–342.
2. Лопатин С. С., Пфайффер Х. Датчики предельного уровня для жидкостей. Физические принципы работы и возможности вибрационных датчиков. *Технические средства автоматизации*. 2004. № 12. С. 24–29.
3. Тараненко Ю. К. Компенсация температурной похибки та похибки від зміни швидкості та тиску рідини у диференційних поточних віброчастотних датчиках густини нафтопродуктів. *Вопросы химии и химической технологии*. 2006. № 6. С. 187–192.
4. Гусейнов Т. К., Амирасланов Б. К., Джафарова Ш. М., Оруджева Г. Э. Математическая модель трубчатого резонатора вибрационного плотнометра жидкости, работающего в режиме свободных колебаний. *Евразийский союз ученых*. 2014. № 7. С. 11–12.
5. Гусейнов Т. К., Абдулова Н. А. Однотрубный резонатор с точечными массами для вибрационно-амплитудного плотнометра. *Современные технологии в нефтегазовом деле*. 2017. № 1. С. 122–125.
6. Минаков А. В., Дектерев А. А., Гаврилов А. А., Рудяк В. Я. Численное моделирование процесса работы виброакустического датчика вязкости камертонного типа. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2009. № 2(4). С. 456–468.
7. Oliynyk O., Taranenko Yu., Shvachka A., Chorna O. Development of auto-oscillating system of vibration frequency sensors with mechanical resonator. *Eastern-European journal of enterprise technologies*. 2017. Vol. 85, pp. 56–60.
8. Matsiev L. F. Application of flexural mechanical resonators to high throughput liquid characterization. *IEEE International Ultrasonics Symposium, San Juan*. 2000. No. 8, pp. 78–82.
9. Степанов А. С., Сбытова Е. С., Подалков В. В. Динамика микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих стержней на вибрирующем основании. *Машиностроение и инженерное образование*. 2015. № 2(43). С. 15–21.
10. Живаго Э. Я., Михайленко Н. И. Решение технических задач с использованием принципа Даламбера. *Вестник Сибирского государственного индустриального университета*. 2015. № 3(13). С. 22–29.
2. Lopatin S. C., Pfyffer Kh. Datchiki predel'nogo urovnya dlya zhidkostey [Sensors of the limit level for liquids]. *Tekhnicheskiye sredstva avtomatizatsii*, 2004, no. 12, pp. 24–29 (in Russian).
3. Taranenko Yu. K. Kompensatsiya temperaturnoyi pokhybky ta pokhybky vid zminy shvydkosti ta tysku ridyny u dyferentsiynykh potochnykh vibrochastotnykh datchykakh hustyny naftoproduktiv [Compensation of temperature error and error from changes in speed and pressure of liquid in differential current vibro-frequency sensors of oil products density]. *Voprosy khymyy u khymycheskoy tekhnolohyy*, 2006, no. 6, pp. 187–192 (in Ukrainian).
4. Huseynov T. K., Amyraslanov B. K., Dzhaforova Sh. M., Orudzheva H. E. Matematycheskaya model' trubchatoho rezonatora vybratsyonnoho plotnomera zhydkosty, rabotayushcheho v rezhyme svobodnykh kolebanyy zhidkostey [Mathematical model of a tubular resonator of a vibrational densometer of a liquid operating in a mode of free oscillations]. *Evrasyyskyy soyuz uchenykh*, 2014, no. 7, pp. 11–12 (in Russian).
5. Huseynov T. K., Abdulova N. A. Odnotrubbyy rezonator s tochechnyymi massamy dlya vybratsyonno-amplytudnoho plotnomera [Single-tube resonator with point masses for vibration-amplitude densimeter]. *Sovremennyye tekhnolohyy v neftegazovom dele*, 2017, no. 1, pp. 122–125 (in Russian).
6. Minakov A. V., Dekterev A. A., Gavrilov A. A., Rudyak V. Ya. Chislennoye modelirovaniye protsessy raboty vibroakusticheskogo datchika vyazkosti kamertonnoho tipa [Numerical modeling of the operation process of a vibroacoustic sensor of tuning fork]. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2009, no. 2(4), pp. 456–468.
7. Oliynyk O., Taranenko Yu., Shvachka A., Chorna O. Development of auto-oscillating system of vibration frequency sensors with mechanical resonator. *Eastern-European journal of enterprise technologies*, 2017, no. 85, pp. 56–60. doi: 10.15587/1729-4061.2017.93335
8. Matsiev L. F. Application of flexural mechanical resonators to high throughput liquid characterization. *IEEE International Ultrasonics Symposium*, 2000, no. 8, pp. 78–82.
9. Stepanov A. S., Sbytova Ye. S., Podalkov V. V. Dinamika mikromekhanicheskogo giroskopa s rezonatorom v vide uprugikh sterzhney na vibriruyushchem osnovanii [Dynamics of a micromechanical gyroscope with a resonator in the form of elastic rods on a vibrating base]. *Mashinostroyeniye i inzhenernoye obrazovaniye*, 2015, no. 2(43), pp. 15–21.
10. Zhivago E. Ya., Mikhaylenko N. I. Resheniye tekhnicheskikh zadach s ispol'zovaniyem printsipa Dalamberta [Solving technical problems using the d'Alembert principle]. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo industrial'nogo universiteta*, 2015, no. 3(13), pp. 22–29.

References

1. Zatserklyannyu O. V. Vibratsionnyye plotnomery gazov i zhidkostey [Vibrational densimeters of gases and liquids]. *Innovatsii na osnove informatsionnykh i kommunikatsionnykh tekhnologiy*, 2011, no. 1, pp. 340–342 (in Russian).