УДК 621.317.08

ДИНАМІЧНІ ВИМІРЮВАННЯ ЯК ЗАДАЧА ОБЕРНЕННЯ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ

О.С. Куценко [1], С.В. Коваленко[2]

[1]*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Кирпичова, 2, 61002, Харків, Україна, kuzenko@kpi.kharkov.ua*
[2]*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Кирпичова, 2, 61002, Харків, Україна, adbc@ukr.net*

Анотація

Розглядається процес динамічних вимірювань змінних фізичних величин. Передбачається, що математична модель вимірювального каналу відома і являє собою лінійну стаціонарну динамічну систему з одним входом і одним виходом. На вхід системи надходить вимірюваний фізичний процес, а на виході має місце результат вимірювань, як правило, у вигляді цифрового коду. Таким чином, завдання вимірювання зводиться до відновлення вхідного сигналу динамічної системи за відомим виходом. Така інтерпретація проблеми динамічних вимірювань відповідає одній з класичних задач теорії управління – задачі обернення або інвертування.

В теорії управління розв'язання задачі обернення, як правило, засновано на знаходженні зворотного оператора вихідної динамічної системи. При реалізації методу зворотних операторів виникає багато проблем, серед яких слід відзначити проблеми стійкості, фізичної можливості бути реалізованим, грубості і коректності зворотних операторів.

В роботі пропонується спрощений підхід до розв'язання задачі обернення. Вхідні та вихідні сигнали інтерполюються кубічними сплайнами, коефіцієнти яких знаходяться шляхом розв'язання лінійної системи алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: динамічні вимірювання; керована система; задача обернення; вимірювальний процес; поліноміальна інтерполяція; сплайн.

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими та практичними завданнями

Системи вимірювання (СВ), що застосовуються в автоматичних регуляторах керованих процесів, відносяться до класу динамічних в силу двох обставин. Перше – це вимірюваний фізичний процес, що змінюється в часі. Друге – СВ являє собою динамічну систему, що перетворює вимірюваний процес $x(t)$ в деяку спостережувану вихідну величину $y(t)$. Оскільки нас цікавить вхідний сигнал $x(t)$, то проблему динамічних вимірювань можна інтерпретувати як відому в теорії керованих систем задачу обернення: за відомим виходом $y(t)$ відновити вхідний сигнал $x(t)$.

Задача обернення динамічних систем в загальному вигляді не має коректного рішення, але для різних приватних завдань рішення може бути знайдено. Такий підхід на основі поліноміального уявлення сигналів на вході і виході СВ розглянуто в цій роботі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання даної проблеми

Першою науковою працею, орієнтованою на обернення керованої системи, що являє собою СВ, слід вважати статтю О. М. Крилова «Деякі зауваження про крешери та індикатори» [1], в якій автор дав сучасне трактування задачі динамічного вимірювання як задачі знаходження невідомої правої частині за відповідним рішенням диференціального рівняння 2-го порядку.

У ряді робіт [2–5] викладається сучасна концепція динамічних вимірювань, що базуються на принципах класичної сучасної теорії управління. Зазначені підходи забезпечують корекцію динамічної похибки вимірювань на основі відновлення вхідного сигналу. Пропонується використовувати методи адаптивного управління, режимів, що ковзають і нейромережний метод. При цьому в публікаціях практично відсутні результати оцінки похибки динамічного вимірювання по вихідному сигналу, що спостерігається, та інформації про динамічні характеристики СВ.

Наукова школа під керівництвом О. Л. Шестакова висвітлює питання аналізу помилок при динамічних вимірюваннях, підвищення точності на основі методів теорії автоматичного управління [3, 5]. Такий підхід дає можливість отримати ефективні методи відновлення вимірюваного сигналу, аналізу та зменшення динамічної помилки. В той же час запропоновані методи синтезу коректуючих ланок вимагають інформацію про повний вектор стану, що, як правило, неможливо.

Оригінальна постановка задачі обернення представлена в [6]. Авторами за допомогою генетичного алгоритму проведена ідентифікація параметрів датчика з одночасним відновленням вхідного сигналу. Однак, запропонований метод займає чимало часу в зв'язку з реалізацією генетичного алгоритму.

В теорії управління проблема обернення динамічних систем має обширну бібліографію і давню передісторію. Основоположними роботами в цьому напрямку можна вважати [7, 8], в яких обґрунтовано критерії та методи побудови зворотних операторів. Значний внесок у розвиток теорії і практики інверсії динамічних систем зроблено в роботах [9–11]. У них запропоновано нові критерії оборотності лінійних динамічних систем і описано конкретні шляхи розв'язання задачі обернення. Ряд практичних результатів розв'язання задач інвертування стосовно до електричних і механічних систем наведено в роботах [12, 13].

В роботі [14] викладено і обґрунтовано метод обернення динамічних систем в класі поліноміальних сигналів, що дозволяє будувати прості та ефективні алгоритми обернення.

Постановка задачі дослідження

Метою роботи є розробка спрощеного методу розв'язання задачі обернення стосовно до динамічної системи вимірювання в класі поліноміальних сигналів на вході і виході. В якості поліномів розглядаються кубічні сплайни довільної довжини.

Подання сигналів у лінійних перетворюючих динамічних системах (ПДС)

Під ПДС будемо розуміти технічний пристрій, перетворюючий вхідний вплив $x(t)$ $t\in[0,T]$ в спостережуваний вихідний сигнал $y(t)$. Будемо також припускати, що математична модель ПДС відома і описується диференціальним рівнянням зв'язку «вхід–вихід»

$$a_0 y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + ... + a_p y = b_0 x^{(q)} + b_1 x^{(q-1)} + ... + b_q x \,. \quad (1)$$

Припускається, що $p > q$, а також все корені характеристичного рівняння (1) знаходяться в лівій півплощині комплексної площині, тобто ПДС асимптотично стійка.

Відносно сигналів $x(t)$ і $y(t)$ приймемо гіпотезу про те, що вони являють собою ступеневі многочлени ступеня не вище l. Тут доречно пригадати теорему Вейєрштрасса [15] про апроксимацію: якщо $f(t)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує многочлен $P_n(t)$ ступеня $n = n(\varepsilon)$, для якого на всьому відрізку $[a,b]$ має місце нерівність $\left| f(t) - P_n(t) \right| \le \varepsilon$.

Цей фундаментальний результат є одним з основоположних при обґрунтуванні вибору многочленів в якості моделі сигналів. Ще одним фактором на користь поліномів, як способу уявлення сигналів, є лінійність простору L^l поліномів ступеня не вище l [14]. Крім того, результат диференціювання полінома $P_l(t)$ також належить L^l:

$$\frac{d}{dt} P_l(t) \in L^l, \ \forall P_l(t) \in L^l \,. \quad (2)$$

Доведемо наступне твердження: нехай на вхід динамічної системи (1) надходить вхідний вплив у вигляді поліному ступеня l

$$x(t) = \sum_{k=0}^{l} x_k \frac{t^k}{k!} \,, \quad (3)$$

тоді вихід $y(t)$ є також поліном ступеня l.

Будемо шукати вимушене рішення $y(t)$ рівняння (1) у вигляді

$$y(t) = \sum_{j=0}^{l} y_j \frac{t^j}{j!} \,. \quad (4)$$

Підставимо (3) і (4) в (1) та прирівняємо коефіцієнти при однакових ступенях t в лівій і правій частинах. В результаті отримаємо лінійну симетричну систему алгебраїчних рівнянь зв'язку (5) між векторами-стовпцями X та Y, складеними з коефіцієнтів поліномів (3) і (4):

$$A\mathrm{Y} = B\mathrm{X} \,, \quad (5)$$

де коефіцієнти матриць A і B мають вигляд

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i+p<j \vee i>j, \\ a_{i-j+p}, & i+p \ge j \vee i \le j, \end{cases} \quad i,j=\overline{1,l+1}, \quad (6)$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & i+q<j \vee i>j, \\ b_{i-j+q}, & i+q \ge j \vee i \le j. \end{cases} \quad i,j=\overline{1,l+1}. \quad (7)$$

Рівняння (5) дозволяє вирішити як пряму задачу – знаходження виходу Y за заданим X, так і зворотну: знайти вхідний сигнал X по відомому виходу Y:

$$\mathrm{X} = B^{-1}A\mathrm{Y} \,. \quad (8)$$

Звернемо увагу на те, що система (5) верхньо трикутна і її рішення легко знаходиться послідовним рішенням найпростіших одновимірних рівнянь, починаючи з останнього. Таким чином, якщо вихідний сигнал $y(t)$ СВ представлений поліномом ступеня l з коефіцієнтами Y, то реальний вимірюваний фізичний процес $x(t)$ також представляється поліномом ступеня l з коефіцієнтами X, отриманими відповідно до (8).

Наведений метод обернення динамічної СВ принципово відрізняється від методу обернення на основі побудови зворотного по відношенню до вихідної системі оператора. По суті, проведені заміни функцій часу $x(t)$ і $y(t)$ фіксованими векторами X і Y. Аналогічний підхід розглянуто у роботі [16] і називається перетворенням Тейлора.

Поліноміальне уявлення результуючої функції часу $y(t)$ може проводитися різними методами: інтерполяційними многочленами Лагранжа, Ньютона, Чебишева та ін., що дозволяють побудувати многочлен, який співпадає з функцією $y(t)$ в заданих точках відліку; многочленами, побудованими на основі квадратичного наближення. Інтерполяція функцій $y(t)$ і $x(t)$ кубічними сплайнами дозволяє врахувати переваги і недоліки розглянутих раніше методів [17]. В результаті сплайн-інтерполяції отримуємо плавну криву, що описується на ділянках між точками відліку поліномами 3-го ступеня, співпадаючими зі значеннями функції в точках відліку. У точках стикування перші і другі похідні сусідніх елементів сплайнів збігаються між собою [17].

Деякі елементи алгебри поліномів

З метою спрощення перетворень з використанням поліномів, розглянемо їх векторне подання та відповідні алгебраїчні операції [14]. Поліном $x(t)$ виду (3) ступеня l будемо записувати:

$$x(t) = T\mathrm{X}, \tag{9}$$

де $T = (1, t, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}, ..., \frac{t^l}{l!})$, а $\mathrm{X} = (x_0, x_1, ..., x_l)^{\mathrm{T}}$ – вектор-стовпець коефіцієнтів полінома (3).

Операції додавання поліномів $x_1(t)$ і $x_2(t)$ відповідає операція додавання векторів X_1 і X_2

$$x_1(t) + x_2(t) = T(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2), \tag{10}$$

а операції множення полінома на число α відповідає множення на α вектора X

$$\alpha x(t) = T\alpha\mathrm{X}. \tag{11}$$

Диференціювання полінома $x(t)$ здійснюється за формулою

$$\frac{dx(t)}{dt} = T\Lambda\mathrm{X}, \tag{12}$$

де $\Lambda - (l+1)\times(l+1)$ квадратна матриця, елементи λ_{ij} якої мають вигляд $\lambda_{ij} = \delta_{i+1,j}$, де δ_{sk} – символ Кронекера, $\delta_{sk} = 1$ при $s = k$ та $\delta_{sk} = 0$ при $s \neq k$.

Похідна k-го порядку обчислюється за формулою

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} = T\Lambda^k\mathrm{X}, \tag{13}$$

в якій елементи степеневої матриці Λ^k мають вигляд $\lambda_{ij}^k = \delta_{i+k,j}$.

Сплайн-інтерполяція вхідного і вихідного сигналів СВ

Будемо розглядати функції $x(t)$ і $y(t)$ на інтервалі довжини n з точками відліку $0, 1, 2, ..., n$. На кожному з n одиничних інтервалів будемо шукати вхідну $x^k(t)$ функцію і вихідну $y^k(t)$ у вигляді кубічних поліномів

$$\begin{aligned} x^k(t) &= x_0^k + x_1^k t + x_2^k \frac{t^2}{2} + x_3^k \frac{t^3}{6}, \\ y^k(t) &= y_0^k + y_1^k t + y_2^k \frac{t^2}{2} + y_3^k \frac{t^3}{6}, \end{aligned} \tag{14}$$

де $k = \overline{1, n}$ – номер одиничного інтервалу,

$$\begin{aligned} (x_0^k, x_1^k, x_2^k, x_3^k)^{\mathrm{T}} &= \mathrm{X}^k, \\ (y_0^k, y_1^k, y_2^k, y_3^k)^{\mathrm{T}} &= \mathrm{Y}^k \end{aligned} \tag{15}$$

вектори-стовпці коефіцієнтів поліномів (14).

Тоді, з урахуванням векторних уявлень поліномів (9), (14) можна записати як

$$\begin{aligned} y^k(t) &= T\mathrm{Y}^k, \\ x^k(t) &= T\mathrm{X}^k. \end{aligned} \quad k = \overline{1, n} \tag{16}$$

Необхідно знайти вектори коефіцієнтів $\mathrm{X}^k, \mathrm{Y}^k$ $(k = \overline{1, n})$ такі, що відповідні їм кубічні поліноми задовольняють рівнянню динаміки вимірювальної системи (1), заданим значенням функції $y(t)$ в точках відліку $y^0, y^1, ..., y^n$ та умовам стикування сусідніх поліномів в точках відліку по першій і другій похідним.

Рівняння зв’язку, зумовлені динамікою СВ, отримані раніше і мають вигляд (5)

$$A\mathrm{Y}^k = B\mathrm{X}^k, \quad k = \overline{1, n} \tag{17}$$

Умови стикування поліномів в точках відліку

$$\begin{aligned} T(1)\mathrm{Y}^k &= T(0)\mathrm{Y}^{k+1}, \\ T(1)\mathrm{X}^k &= T(0)\mathrm{X}^{k+1}. \end{aligned} \quad k = \overline{1, n-1} \tag{18}$$

Умови стикування по 1-й і 2-й похідним сусідніх елементів сплайна запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} T(1)\Lambda\mathrm{Y}^k &= T(0)\Lambda\mathrm{Y}^{k+1}, \\ T(1)\Lambda\mathrm{X}^k &= T(0)\Lambda\mathrm{X}^{k+1}, \\ T(1)\Lambda^2\mathrm{Y}^k &= T(0)\Lambda^2\mathrm{Y}^{k+1}, \\ T(1)\Lambda^2\mathrm{X}^k &= T(0)\Lambda^2\mathrm{X}^{k+1}. \end{aligned} \quad k = \overline{1, n-1} \tag{19}$$

До рівнянь (17), (18), (19) слід додати умови, що фіксують значення $y(t)$ в точках відліку

$$\begin{aligned} T(0)\mathrm{Y}^k &= y^{k-1}, \ k = \overline{1, n} \\ T(1)\mathrm{Y}^n &= y^n. \end{aligned} \tag{20}$$

В результаті отримана система $N = 11n - 5$ лінійних рівнянь відносно $8n$ невідомих компонент векторів Y^k і X^k, $(k = \overline{1, n})$. Неважко переконатися, що для $n \geq 2$ $N > 8n$, тобто число рівнянь більше числа невідомих. Отже, система (17) – (20) в загальному випадку несумісна.

Рішення системи рівнянь (17) – (20) в тестовому режимі методом псевдообернення для $n = 3$ та відповідні сплайни приведено на рис. 1.

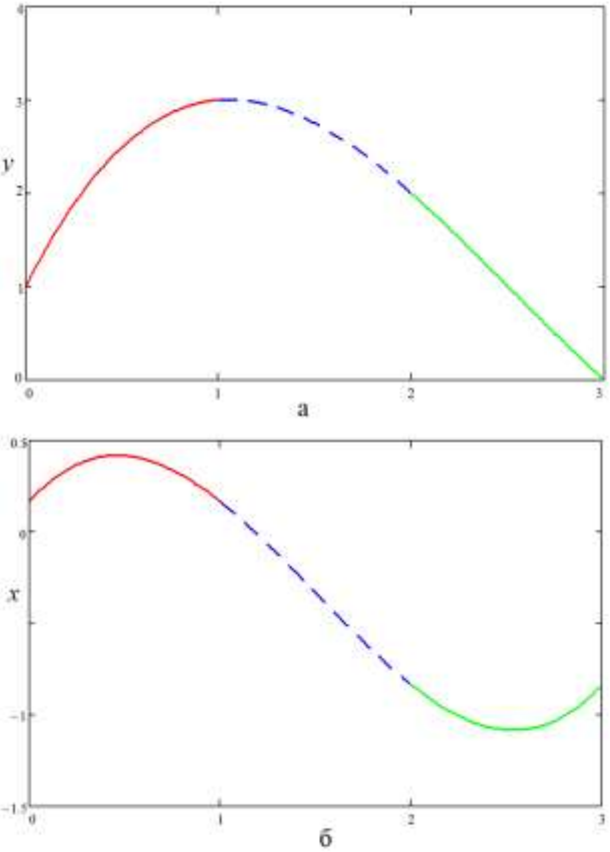

Рис. 1. Графіки сплайнів вихідного (а) та вхідного (б) сигналів

Динаміка вимірювальної системи представлена диференціальним рівнянням 2-го порядку

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) .$$

Значення $y(t)$ в точках відліку $y(0) = 1$, $y(1) = 3$, $y(2) = 2$, $y(3) = 0$.

Рекурентна сплайн-інтерполяція сигналів СВ

У разі тривалих процесів вимірювання кількість точок відліку може бути досить великою і відповідна система рівнянь (17) – (20) буде мати високу розмірність, що не дозволяє отримати її рішення із заданою точністю. У цьому випадку пропонується будувати сплайн із секцій, що складаються з деякої фіксованої кількості інтервалів відліку, що дозволяє отримати рішення відповідної системи рівнянь з заданою точністю. У цьому випадку систему (17) – (20) необхідно доповнити додатковими умовами (21) сполучення сусідніх секцій за значеннями функцій $x(t)$, $y(t)$, і за значеннями їх першої і другої похідних $x'(t)$, $y'(t)$, $x''(t)$, $y''(t)$, які отримані у точці n шляхом вирішення системи (17) – (20) для попередньої секції

$$\begin{gathered} T(0)\Lambda\mathrm{Y}^1 = y'(0), T(0)\Lambda^2\mathrm{Y}^1 = y''(0), T(0)\mathrm{X}^1 = x(0), \\ T(0)\Lambda\mathrm{X}^1 = x'(0), T(0)\Lambda^2\mathrm{X}^1 = x''(0). \end{gathered} \tag{21}$$

Висновки

1. Запропонований метод відновлення сигналу на вході СВ на основі розв’язання оберненої задачі управління є ефективним способом вирішення проблеми динамічних вимірювань.
2. Поліноміальне уявлення сигналів дозволяє конструювати досить прості алгоритми розв’язання задачі обернення, які зводяться до рішення перевизначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом псевдообернення.
3. Серед різних методів поліноміального уявлення сигналів у вигляді сплайнів виглядає найбільш обґрунтованим з точки зору використання в задачах вимірювань.

Abstract

The process of dynamic measurements of variable physical quantities is considered. It is assumed that the mathematical model of the measuring channel is known and is a linear stationary dynamic system with one input and one output. The measured physical process enters the input of the system, and the result of measurements takes place at the output, generally, in the form of a digital code. Thus, the measurement problem is to the restore the input signal of a dynamic system with a known output. This interpretation of the dynamic measurement problem corresponds to one of the classical problems of control theory – the inversion problem. In control theory, the solution to the inversion problem is, generally, based on finding the inverse operator of the original dynamical system. When implementing the method of inverse operators, many problems arise, among which the problems of stability, physical feasibility, roughness and correctness of inverse operators should be noted. The paper proposes a simplified approach to solving the inversion problem. Input and output signals are interpolated by cubic splines, the coefficients of which are found by solving a linear system of algebraic equations.

Key words: dynamic measurements; controlled system; inversion problem; measuring process; polynomial interpolation; spline.

Аннотация

Рассматривается процесс динамических измерений переменных физических величин. Предполагается, что математическая модель измерительного канала известна и представляет собой линейную стационарную динамическую систему с одним входом и одним выходом. На вход системы поступает измеряемый физический процесс, а на выходе имеет место результат измерений, как правило, в виде цифрового кода. Таким образом, задача измерения сводится к восстановлению входного сигнала динамической системы с известным выходом. Такая интерпретация проблемы динамических измерений соответствует одной из классических задач теории управления – задаче обращения или инвертирования. В теории управления решение задачи обращения, как правило, основано на нахождении обратной оператора исходной динамической системы. При реализации метода обратных операторов возникает много проблем, среди которых следует отметить проблемы устойчивости, физической реализуемости, грубости и корректности обратных операторов. В работе предлагается упрощенный подход к решению задачи обращения. Входные и выходные сигналы интерполируются кубическими сплайнами, коэффициенты которых находятся путем решения линейной системы алгебраических уравнений.

Ключевые слова: динамические измерения; управляемая система; задача обращения; измерительный процесс; полиномиальная интерполяция; сплайн.

Список літератури

1. Крылов А. В. Избранные труды. Москва : Издательство АН СССР, 1958. 804 с.
2. Денисенко В. В. Динамическая погрешность многоканальных средств измерений. *Измерительная техника*. 2009. №1, С 3–6.
3. Шестаков А. Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях. Челябинск : Издат центр ЮУрГУ, 2013. 257 с.
4. Yurasova E. V., Bizgaev M. N., Volosnikov A. S. General approaches to dynamic measurements error correction based on the sensor model. *Bulletin of the South Ural State University, Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2015. vol. 16, no. 1, pp 64–80.
5. Shestakov A. L. Dynamic measurements based on automatic control theory approach. *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing*, World Scientific Publishing Company. 2015, pp. 54–65.
6. Полярус О. В., Поляков Є. О. Метод відновлення сигналу на вході датчика. *Вестн. НТУ «ХПИ»*. 2011. №57, С. 142–147.
7. Sain M. K., Massey J. L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. vol. AS – 14, no. 2, pp. 141–149.
8. Silverman L. M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. vol. AS – 14, no. 3, pp. 270–276.
9. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. Методы робастного обращения динамических систем. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. 219 с.
10. Костенко Ю. Т., Любчик Л. М. Системы управления с динамическими моделями. Харьков : Основа, 1996. 212 с.
11. Борухов В. Т. Критерии обратимости линейных стационарных многомерных систем. *Автоматика и телемеханика.* 1978. вып. 11, С. 5–11.
12. Пухов Г. Е., Жук К. Д. Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов. Киев : Наукова думка, 1966. 218 с.
13. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. Москва : Наука, 1987. 304 с.
14. Kutsenko A., Kovalenko S., Tovazhnyanskyy V. Inversion of Dynamic Systems for Certain Classes of Signals. *Computer Modeling and Intelligent Systems : Proceedings of the Second International Workshop*, Zaporizhzhia, 15-19 April 2019. Zaporizhzhia, 2019. pp. 391–401.
15. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 527 с.
16. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. Киев : Наукова думка, 1980. 419 с.
17. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. Москва : Мир, 1972. 316 с.

References

1. Krylov A. V. Izbrannye trudy [Selected works]. Moscow: Publishing of the USSR Academy of Sciences, 1958. 804 p.
2. Denisenko V. V. Dinamicheskaja pogreshnost' mnogokanal'nyh sredstv izmerenij [Dynamic error of multichannel measuring instruments]. *Measuring technique*. 2009. No. 1, pp. 3–6.
3. Shestakov A. L. Metody teorii avtomaticheskogo upravlenija v dinamicheskih izmerenijah [Methods of theory of automatic control in dynamic measurements]. Chelyabinsk: Publishing center of SUSU, 2013. 257 p.
4. Yurasova E. V., Bizgaev M. N., Volosnikov A. S. General approaches to dynamic measurements error correction based on the sensor model. *Bulletin of the South Ural State University, Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*. 2015. vol. 16, no. 1, pp 64–80.
5. Shestakov A. L. Dynamic measurements based on automatic control theory approach. *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing*, World Scientific Publishing Company. 2015, pp. 54–65.
6. Poljarus O. V., Poljakov Je. O. Metod vidnovlennja sygnalu na vhodi datchyka [Method of signal recovery at the input of the sensor]. *Vestn. NTU "KhPI"*. 2011. No. 57, pp. 142–147.
7. Sain M. K., Massey J. L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. vol. AS – 14, no. 2, pp. 141–149.
8. Silverman L. M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. vol. AS – 14, no. 3, pp. 270–276.
9. Ilin, A. V., Korovin, S. K., Fomichev, V. V. Metody robastnogo obrashhenija dinamicheskih sistem [Robust methods of dynamic systems inversion]. Moscow : FIZMATLIT, 2009. 219 p.
10. Kostenko Yu. T., Lyubchik L. M. Sistemy upravlenija s dinamicheskimi modeljami [Control systems with dynamic models]. Kharkov : Osnova, 1996. 212 p.
11. Borukhov V. T. Kriterii obratimosti linejnyh stacionarnyh mnogomernyh sistem [Criteria of invertibility of linear stationary multidimensional systems]. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1978. vol. 11, pp. 5–11.
12. Pukhov G. E., Zhuk, K. D. Sintez mnogosvjaznyh sistem upravlenija po metodu obratnyh operatorov [Synthesis of multiply connected control systems by the method of inverse operators]. Kyiv : Naukova dumka, 1966. 218 p.
13. Krutko P. D. Obratnye zadachi dinamiki upravljaemyh sistem. Linejnye modeli [Inverse problems of dynamic control systems. Linear models]. Moscow : Nauka, 1987. 304 p.
14. Kutsenko A., Kovalenko S., Tovazhnyanskyy V. Inversion of Dynamic Systems for Certain Classes of Signals. *Computer Modeling and Intelligent Systems : Proceedings of the Second International Workshop*, Zaporizhzhia, 15-19 April 2019. Zaporizhzhia, 2019. pp. 391–401.
15. Mikeladze Sh. E. Chislennyie metodyi matematicheskogo analiza [Numerical methods of mathematical analysis]. Moscow : State publishing house of technical and theoretical literature, 1953. 527 p.
16. Pukhov G. E. Differentsialnyie preobrazovaniya funktsiy i uravneniy [Differential transformations of functions and equations]. Kyiv : Naukova dumka, 1980. 419 p.
17. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. Teoriya splajnov i eyo prilozheniya [The theory of splines and their applications]. Moscow : Mir, 1972. 316 p.