

СОВРЕМЕННЫЕ ОБЛАСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

В.О. Повгородний

*Национальный аэрокосмический университет “Харьковский авиационный институт им. Н.Е. Жуковского”,
вулиця Чкалова, 17, Харків, Україна, povgorod@ukr.net*

Аннотация

В статье обсуждаются вопросы современного математического моделирования различных процессов (компьютерная томография, неразрушающий контроль, а именно, ультразвуковая дефектоскопия и др.) с точки зрения теории обратных задач. Приведены примеры обратных задач, обсуждены их основные особенности и перспективы использования в моделировании. Кроме того, возможен подход к определению максимальной тепловой нагрузки по измеренному с определённой погрешностью температурному (термическому) напряжению путём решения обратной задачи термоупругости. Для получения устойчивого решения обратной задачи термоупругости возможно использование метода А. Н. Тихонова с эффективным поиском параметра регуляризации. Функционал А. Н. Тихонова отражает отклонение температурного напряжения, полученного в результате наблюдения, от рассчитанного на основе приближенного решения прямой задачи термоупругости методом конечных элементов. Экспериментально – теоретическое исследование термоупругих характеристик материалов приборов, а также элементов турбостроения осуществляется исходя из решения обратной задачи термоупругости. Большое значение при решении обратных задач имеют вопросы неопределенности измерений, которые влияют на точность результатов, полученных при решении обратных задач.

Ключевые слова: неразрушающий контроль обратная задача; ультразвуковое исследование; вариационный метод; термоупругость

1. Введение

В различных областях науки и техники с целью познания закономерностей работы некоторого объекта или природного явления проводятся эксперименты самого различного вида. Цель этих экспериментов – выявление главных закономерностей явления и формирование на его основе некоторой математической модели. Очень часто на практике встречаются ситуации, когда объект исследования либо недоступен для наблюдения, либо проведение такого эксперимента дорого, а соответственно, экономически нецелесообразно. Примерами таковых могут служить эксперименты по изучению внутреннего строения Земли, на основе которых можно было бы прогнозировать месторождения полезных ископаемых, предсказывать время и место разрушительных землетрясений. Например, глубина самых глубоких шахт, пробуренных при помощи самого современного оборудования, не превышает 20 км, а средний радиус Земли равен 6371 км. Таким образом, для непосредственного наблюдения доступна лишь приповерхностная часть Земли. При этом, необходимо делать заключение о свойствах Земли (например, об изменении ее плотности с глубиной) по измеренным в ходе эксперимента косвенным наблюдениям. Второй пример – проблемы неразрушающего контроля изделий и конструкций, когда требуется выявить дефект (трещину, полость) внутри работающего объекта (самолета, ракеты, ядерного реактора, ротора

турбины и т.д.). Еще пример – медицинские исследования, направленные на выявление патологий внутренних органов человека. Таким способом в настоящее время является ультразвуковое исследование (УЗИ), широко применяемое в медицине и позволяющее достаточно просто выявлять патологии различных органов. В этом случае объект исследования также недоступен для непосредственного изучения. Мы судим о структуре и размерах органа лишь на основе косвенных данных измерений. В основе этого способа лежит анализ отраженных от органа волн. Точно так УЗИ применяется в технике. Все выше перечисленные данные исследования относятся к так называемым обратным задачам [1].

2. Примеры обратных задач.

В первом примере движение материальной точки массы m в соответствии с законом Ньютона описывается дифференциальным уравнением

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t)$$

Будем считать, что начальное положение точки и ее скорость известны. Предположим, что известно положение точки $x(t)$ как функция времени. Обратная задача состоит в определении силы $F(t)$ по известному закону $F=F(t)$, то есть в определении действующей на точку силы по измеряемой ее траектории.

Во втором примере предположим, что в пространстве расположено недоступное для непосредственного наблюдения тело. Однако, его можно облучать с различных сторон и регистрировать тень на некоторой плоскости, перпендикулярно направлению облучения. Обратная задача состоит в определении формы тела по семейству его теней или другими словами геометрическая обратная задача упругости, а если учесть и температуру – то термоупругости [2, 3].

Приведем следующий пример. На поверхности исследуемого объекта имеются источник колебаний и их приемник, который регистрирует волны как непосредственные пришедшие от источника, так и отраженные от дефекта (полость, непровар, непроклей, непропай, нарушение сплошности, трещина). Обратная задача состоит в определении по известным амплитуде и фазе регистрируемого сигнала геометрической границы дефекта и выявлении его структуры.

Следующий пример представляет собой простейшую линейную модель прибора, регистрирующего какие-либо физические поля (электромагнитные, тепловые), может быть описана следующим образом. На вход прибора поступает сигнал, на выходе регистрируется сигнал, которые связаны зависимостью

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad (1)$$

где $K(t,s)$ – известная функция. Обратная задача состоит в определении входного сигнала $u(t)$ по регистрируемой прибором функции $f(t)$, т.е. в нахождении решения уравнения (1).

Следующий пример. Существуют еще два важных типа обратных задач, не упомянутых ранее, – это проектирование технических объектов и управление системами. Первый тип – это, например, создание аэродинамических профилей оптимальной формы и отыскание подземного контура в теории фильтрации. Второй тип – например, управление температурой газа в печи, регулирование температуры тела (объекта), управление функцией распределения внутренних источников теплоты в зависимости от какого-либо параметра (максимальной температуры, максимальных температурных напряжений и деформаций). Но между двумя последними типами задач идентификации (обратных задач) существует принципиальное отличие. Для задач проектирования и управления расширение множества допустимых решений, обычно, улучшает ситуацию, поскольку, в них требуется найти любое технически выполнимое решение, обеспечивающее критерии качества с необходимой точностью. При решении обратных задач типа идентификации расширение класса возможных решений приводит к увеличению погрешности определения причинных характеристик. Учет же априорной информации, то есть дополнительных сведений о свойствах исследуемого

объекта, приводит к сужению класса возможных решений и, как правило, к снижению погрешности определения необходимых характеристик.

3. О специфике обратных задач.

Обратные задачи обладают рядом особенностей. Во-первых, они, как правило, нелинейные, то есть неизвестная функция или неизвестный параметр входят в операторное или функциональное уравнение нелинейным образом. Во-вторых, решения обратных задач, обычно, неединственные. Для обеспечения единственности часто необходимо требовать избыточности экспериментальной информации, например, при определении полости в теле при помощи регистрации отраженных волн необходимо знание отраженного поля в некотором диапазоне изменения частоты $\omega_0 \in [\omega_1, \omega_2]$. На практике можно измерить отраженное поле в достаточно большом, но конечном наборе частот на отрезке $[\omega_1, \omega_2]$, что может привести к неединственности восстановления формы полости, к появлению посторонних или, как называют их в ультразвуковой диагностике, «фантомных» решений.

В-третьих, обратные задачи не являются корректными. Понятие корректной задачи, являющееся одним из важнейших понятий современной математики, было сформировано французским математиком Ж. Адамаром, а позднее уточнено А.Н. Тихоновым. Оно означает, что решение задачи существует и единственно на некотором множестве, а также непрерывно зависит от входных данных. Смысл первого условия (существование решения) состоит в том, что среди исходных данных нет противоречащих друг другу условий, исключающих возможность решения задачи. Второе условие (единственность) означает, что данных достаточно для однозначной определенности решения задачи. Третье условие (непрерывная зависимость от исходных данных) означает, что малые изменения в данных приводят к малым изменениям в решении. Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из условий корректности, называются некорректными. Кроме того, в обратных задачах, как правило, отсутствует непрерывная зависимость от исходных данных в отличие от прямых задач. Поскольку, входной информацией в обратных задачах являются экспериментальные данные, определяемые с некоторой погрешностью, которую не всегда можно оценить, то решение обратной задачи с некорректными входными данными может сильно отличаться от точного решения. В этой ситуации на первый план выходят способы математической обработки входной информации. Большой вклад в развитие математической теории некорректных задач внес, как уже было сказано, академик А.Н.Тихонов, который определил, как надо понимать решение некорректной задачи. Он предложил один из возможных способов регуляризации некорректной задачи, состоящий в сведении исходной задачи решения некоторого оператор-

ного уравнения к проблеме отыскания минимума некоторого функционала (функционала “невязки”). Некорректность присуща обратным задачам почти всегда; в одних случаях она может быть преодолена весьма просто, в других – вообще, требует переосмысления понятия самого решения. Приведем еще несколько примеров.

Рассмотрим математическую задачу, в которой требуется найти непрерывную функцию $u(t)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{dt} = f(t),$$

Из математики известно, что, используя правила дифференцирования, функция $u(t) = \int f(t)dt + C$ есть решение, если C – произвольная константа. Таким образом, задача некорректна, ибо ее решение не является единственным. Эту некорректность можно преодолеть, сузив область отыскания решения, а именно, подчинив функцию $u(t)$ дополнительному условию, фиксирующему ее значение в начальный момент времени, например, $u(0) = 0$. Условие такого рода называется начальным или условием Коши. В этом случае уравнение (2) с начальным условием имеет единственное решение $u(t) = \int_0^t f(t)dt$. Здесь переход от некорректной задачи к корректной достигается путем сужения множества возможных решений, и задача называется условно корректной.

Рассмотрим следующую обратную задачу. Использование полученной экспериментальной информации носит в ряде случаев косвенный характер и необходимо для проверки и верификации применяемых алгоритмов, построенных на базе методов решения обратных задач термоупругости и теплопроводности [4,5], выбора конкретных расчетных методик и параметров регуляризации получаемых решений. В то же время выбор алгоритмов решения обратных задач, их адаптация под реальные режимы эксплуатации, настройка системы должны включать проведение вычислительных экспериментов, основанных на использовании методологии обратных задач, и численное моделирование, проводимое на этапе проектирования системы измерений для оптимизации мест расположения датчиков на конструкции и на этапе обработки экспериментальных данных – для обеспечения достоверности конечных результатов. Важной особенностью обратных задач термоупругости (тепловой диагностики) является их математическая некорректность. Это связано с тем, что обратные задачи описывают модели физически необратимых процессов, в которых нарушаются причинно-следственные связи. Некорректность задачи ставить высокие требования к анализу имеющейся исходной информации, выбору методов решения и методике обработки экспериментальных данных.

Особую роль приобретают вопросы единственности решения, которые во многих случаях являются весьма существенными при анализе получаемых решений. В обратных задачах с достаточной достоверностью на основе физических соображений можно предположить существование решения при точных исходных данных, но его единственность не всегда очевидна, так как один и тот же отклик исследуемой системы может вызываться различными причинами. Анализ условий единственности решения обратных задач позволяет сформулировать требования к условиям проведения экспериментальной части исследования, интерпретация данных которой проводится с помощью решения обратных задач. Когда решение обратной задачи не единственно, регуляризирующие алгоритмы позволяют уточнить априорные оценки искомых решений, если обеспечивается близость получаемых приближений к нормальному решению относительно начального приближения решения обратной задачи, которое заведомо ближе к истинному, чем априорная оценка. Все методы решения обратных задач можно разделить на универсальные и проблемно-ориентированные. К универсальным методам относятся алгоритмы, использующие информацию самого общего характера и только, а также пригодные для решения самого широкого класса задач, например, вариационный метод А.Н.Тихонова. К проблемно-ориентированным относятся методы, в которых существенно учитывается специфика решаемой задачи. Проблемно-ориентированные методы имеют существенно более узкую область применения, предъявляют довольно жесткие требования к условиям проведения эксперимента, но в своей области применения они превосходят универсальные методы (алгоритмическая простота учета априорной информации, быстродействие, точность и т.п.). Поэтому, создавая систему диагностики конкретной механической системы необходимо сформулировать требования к получаемой информации, а также ясно представлять возможности системы измерений, с точки зрения полноты и достоверности первичной экспериментальной информации, исходя из этого сформулировать требования к вычислительной части, использующей те или другие алгоритмы интерпретации исходных данных. Исходя из этого, исследователю желательно иметь в своем распоряжении комплекс программ универсальных и проблемно-ориентированных методов решения обратных задач.

Концепция диагностических систем для обеспечения безопасной эксплуатации тепловых машин должна включать в себя составной частью исследования, основанные на проведении вычислительных экспериментов в рамках используемой методологии обратных задач. Здесь необходимо численное моделирование, как на этапе проектирования системы измерений (точность решения обратных задач существенно зависит от расстановки измерительных датчиков), так и на этапе подготовки к обработке экс-

периментальных данных и в процессе их обработки. Вычислительный эксперимент может быть использован для выбора наиболее подходящего в данном конкретном случае алгоритма решения обратной задачи, выбора параметров вычислительного процесса, оценки влияния неопределенностей в математической модели, погрешностей измерений и т.п. Здесь используются априорные представления о характере искомого решения, полученные из физических соображений или из ранее проведенных экспериментальных исследований, или расчетным путем с использованием более сложных математических моделей. Программы решения обратных задач используются на этапе вычислительного эксперимента в режиме моделирования, когда по данным значениям искомым параметров рассчитываются из решения прямых задач соответствующие измеряемые характеристики. В полученные данные вносятся помехи, моделирующие погрешности измерительно-регистрирующей аппаратуры. Затем, по полученным исходным данным решаются соответствующие обратные задачи, и результаты сравниваются с предполагаемыми. После обработки реальных экспериментальных данных также должно проводиться тщательное моделирование для оценки достоверности и точности полученных результатов. Таким образом, в распоряжении исследователя должно быть развитое математическое обеспечение, позволяющее вести как обработку экспериментальных данных, так и широкое моделирование процессов термонагруженности элементов машин и конструкций.

4. Выводы.

Обратные задачи – современная бурно развивающаяся часть математической физики, сформировавшаяся в основном в последние 40 лет. Все большая часть математических моделей приобретает стройность и достоверность как раз благодаря достижениям теории обратных задач. Важную роль имеют вопросы неопределенности измерений, так как это влияет на точность решения обратных задач. Так, с ее помощью достигнут впечатляющий прогресс в компьютерной томографии. Стремительное распространение этого метода обусловлено его эффективным применением в медицине, биологии, диагностике плазмы. Внедрение метода компьютерной томографии произвело революцию в медицинской диагностике и электронной микроскопии биологических макромолекул. Первые обратные задачи были решены в связи с проблемами геофизики и разведки полезных ископаемых. В настоящее время с все большим усложнением моделей, используемых в геофизике, совершенствуется и методика решений обратных задач. Метод акустической разведки полезных ископаемых несравнимо дешевле простого

бурения пробных скважин. Вместе с тем, геоакустика дает возможность получать более точную информацию о состоянии недр, а звуковые волны являются, по –видимому, наиболее пригодными для локализации недр видом возмущения (в последние годы интенсивно обсуждается проект глобального вибрационного просвечивания Земли с целью уточнения ее строения). Обратные задачи геоакустики гораздо труднее, нежели задачи математической томографии, в силу сложного строения рассеянного волнового поля из-за наличия многих типов волн. Задачи ультразвукового неразрушающего контроля также требуют совершенствования моделей в связи с широким внедрением в практику композиционных материалов, которые обладают различными механическими свойствами по различным направлениям (анизотропией), что влечет за собой усложнение алгоритмов решения обратных задач рассеяния. Для этого класса задач очень важен учет свободной границы (для обнаружения приповерхностных дефектов) и анизотропии материала модели. Обратные задачи об определении формы дефекта (геометрические обратные задачи) приводят к последовательному решению систем интегральных уравнений 1-ого рода, либо к решению некоторого нелинейного дифференциального уравнения. В последнее время задачи, возникающие в этой области, привлекают внимание математиков-теоретиков. Эта область в настоящее время бурно развивается.

Список литературы

1. Ватульян А. О. *Обратные задачи в механике деформированного тела*. М.: Физматгиз, 2007. 223 стр.
2. Коваленко А. Д. *Термоупругость*. Киев: Высшая школа, 1975. 216 стр.
3. Мацевитый Ю. М., Постольник Ю. С., Повгородний В. О. *Обратные задачи термомеханики*. Харьков: Проблемы машиностроения, 2008. Т. 11. №3. С. 30-37.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. – М.: Наука, 1979. 288 стр.
5. Мацевитый Ю. М. *Обратные задачи теплопроводности. В 2-х томах*. Киев: Наукова думка, 2002-2003. Т. 1: Методология. 408 стр.; т. 2: Приложения. – 392 стр.

References

1. Vatulyan A. O. *Inverse problems in the mechanics of a deformable solid*. M.: Fizmatlit, 2007, 223 p.
2. Kovalenko, A. D. *Thermoelasticity*. K.: Vyscha shkola, 1975, 216 p.
3. Matsevity Yu. M., Postolnik Yu. S., Povgorodny V. O. *Inverse problems of thermomechanics*. Kharkiv. Problems of mechanical engineering. Scientific and technical journal, 2008, vol. 11. no. 3, pp. 30 - 37.
4. Tikhonov, A. N, Arsenin, V. Ya. *Methods for solving non-correct problems*. Moscow: Nauka, 1979, 288 p.
5. Matsevity, Yu. M. *Inverse problems of heat conductivity: In 2 volumes*. K.: Nauk. dumka, 2002-2003, vol. 1: Methodology, 408 p.; Vol. 2: Applications, 392 p.

СУЧАСНІ ГАЛУЗІ ВИКОРИСТАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

В.О.Повгородній

Національний аерокосмічний університет "Харківський авіаційний інститут ім. Н.С. Жуковського", вулиця Чкалова, 17, Харків

Анотація

У статті розглянуто питання сучасного математичного моделювання різних процесів (комп'ютерна томографія, неруйнівний контроль та ультразвукова дефектоскопія та інше) з точки зору теорії обернених задач. Наведені приклади обернених задач, розглянуті їх головні особливості та перспективи використання в моделюванні. Крім того, запропоновано підхід до визначення максимального теплового навантаження за виміряною з певною похибкою температурною (термічною) напругою шляхом розв'язку оберненої задачі термопружності. Для отримання стійкого розв'язку оберненої задачі термопружності використовується метод А. М. Тихонова з ефективним пошуком параметра регуляризації. Функціонал А. М. Тихонова відображає відхил температурної напруги, отриманої в результаті спостереження, від розрахованої на основі наближеного розв'язку прямої задачі термопружності методом скінчених елементів. Експериментально – теоретичне дослідження термопружних характеристик приладів, а також елементів турбобудування відбувається за допомогою розв'язку оберненої задачі термопружності. Велике значення при розв'язку обернених задач мають питання невизначеності вимірювань, що мають вплив на точність результатів, що одержані при вирішенні обернених задач.

Ключові слова: неруйнівний контроль; обернена задача; ультразвукове дослідження; варіаційний метод; термопружність.

MODERN AREAS OF APPLICATION OF REVERSE TASKS OF MATHEMATICS AND PHYSICS

V.O. Povgorodny

National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute named after N.E. Zhukovsky, Chkalova Street, 17, Kharkiv

Abstract

In this article the questions of modern mathematical design of different processes (computer tomography, non-destructive control, and, exactly, ultrasonic fault detection of and other) come into question from the point of view of theory of reverse tasks. Besides, the article proposes an approach to determining the maximum thermal load measured with a certain error of temperature (thermal) stress by solving the inverse problem of thermal elasticity. To obtain a stable solution of the inverse problem of thermoelasticity, the A.N. Tikhonov method with effective search for the regularization parameter is used. The A.N. Tikhonov functional reflects the deviation of the temperature stress obtained as a result of the observation from the finite element method calculated on the basis of the approximate solution of the direct elasticity problem. Examples of reverse tasks are made, their basic features and prospects of the use are discussed in a design. Experimentally is theoretical research of thermoelastic descriptions of materials of devices, and also elements of turboconstruction comes true coming from the decision of reverse problems of thermoelasticity. Great importance in solving inverse problems are the issues of measurement uncertainty, which affects the final results.

Keywords: non-destructive control; reverse problem; ultrasonic research; variational method; thermoelasticity.