UDC 001.4:389.14:621.317

Prospects for the use of Gaussian quadrature to determine the mean integral refractive index of air by its local values measured at two points of the trace

O. Prokopov, A. Shloma

National Scientific Centre "Institute of Metrology", Myronosytska Str., 42, 61002, Kharkiv, Ukraine
alexvas49@ukr.net; andreus0082@gmail.com

Abstract

The Earth's atmosphere has a significant impact on the results of laser range measurements on near-earth traces. This influence is caused by the dependence of the laser signal propagation speed on the refractive index of the air, which varies along the measured trace. Correct accounting of this influence is important for the implementation of metrological traceability of linear measurements from a length measurement standard to distance measurements in large-scale construction, geodesy, geodynamics, navigation, etc. To ensure the required accuracy of such measurements, their results shall be corrected by introducing a correction for the mean refractive index of air along the signal trajectory.

The simplest and most commonly used method for determining this correction is based on the representation of the integral of the refractive index by the quadrature trapezoidal formula in its simplest form, which requires the determination of only two local values of the refractive index at the endpoints of the trace. The accuracy of this method is often insufficient. In this regard, this paper presents the results of the research that will further substantiate a more accurate model for determining the correction under discussion based on two local refractive index values. The proposed model is based on the use of Gaussian quadrature, for which local values are determined not at the end points of the trace, but within the integration interval.

Keywords: quadrature; air refractive index; range measurements; traces; local points.

Received: 04.12.2023 Edited: 22.12.2023 Approved for publication: 26.12.2023

Introduction

The main source of uncertainty in range measurements using electromagnetic waves of the optical range is the inaccuracy of determining the mean integral refractive index of air along the measured trace.

According to [1], for laser range measurements on near-earth traces of length L

$$\bar{n} = \frac{1}{L}\int_0^L n(x)\,dx, \tag{1}$$

where x is the coordinate along the trace. In practice, the method of determining the value from the local values of the refractive index at the endpoints of the trace $n_0 = n(0), n_L = n(L)$ is actively used. The measurement model for this method is based on the representation of the integral (1) using the quadrature trapezoidal formula in the form [2, 3]

$$n_{tr} = \frac{n_0 + n_L}{2} + R_{tr}, \tag{2}$$

where $R_{tr} = \frac{n''(\xi)}{12}L^2$ is the residual term of the trapezoidal quadrature, ξ is a point on the measured trace (on the integration interval).

The accuracy of this model is low. The accuracy may be improved if the refractive index gradients are additionally measured at the endpoints [1, 4], i.e., using the Euler-Maclaurin quadrature instead of the trapezoidal quadrature. This complicates the experiment, since to determine the gradients, the refractive index at additional points equidistant from the endpoints shall be measured. At the same time, for a more accurate determination of the mean refractive index, there is a quadrature according to which two points x_1, x_2 within the integration interval can be used instead of the two endpoints $x = 0$, $x = L$. This is known in computational mathematics as the Gaussian quadrature [5, 6, 7], the prospects of which are discussed below.

Presentation of the main material

The Gaussian quadrature for the integral (1) in the case of two points takes the form [8]

$$n_{gauss} = \frac{n(x_1)+n(x_2)}{2} + R_{gauss}, \quad (3)$$

where $x_1 = \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)$; $x_2 = \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)$ are trace points where the local values of the refractive index are determined; $R_{gauss} = \frac{n^{(4)}(\xi)}{4320} L^4$ is the residual term of the Gaussian quadrature, ξ is a point on the integration interval.

It should be noted that the components of Type A uncertainty should be of the same order for the trapezoidal and Gaussian quadratures, since the source for these quadratures is the inaccuracy of the refractive index measurement at two points of the trace. As for the component of type B uncertainty, based on the ratios of the residual terms of these quadratures, we can conclude that it should be larger in the trapezoidal quadrature.

To illustrate the high accuracy of the Gaussian quadrature, a numerical experiment was performed using a model refractive index profile. The experiment was performed by calculations using formulas (1), (2), and (3) (formulas (2) and (3) without the residual terms) for the profile:

$$n(x) = 1.77172851 \cdot 10^{-28} \cdot x^8 - 4.59826837 \cdot 10^{-25} \cdot x^7 + 2.57368059 \cdot 10^{-22} \cdot x^6 + 2.76189583 \cdot 10^{-19} \cdot x^5 - \\ - 4.01085986 \cdot 10^{-16} \cdot x^4 + 1.81250272 \cdot 10^{-13} \cdot x^3 - 3.2407318 \cdot 10^{-11} \cdot x^2 + 1.30717809 \cdot 10^{-9} \cdot x + 1.00028179, \quad (4)$$

as shown in Fig. 1.

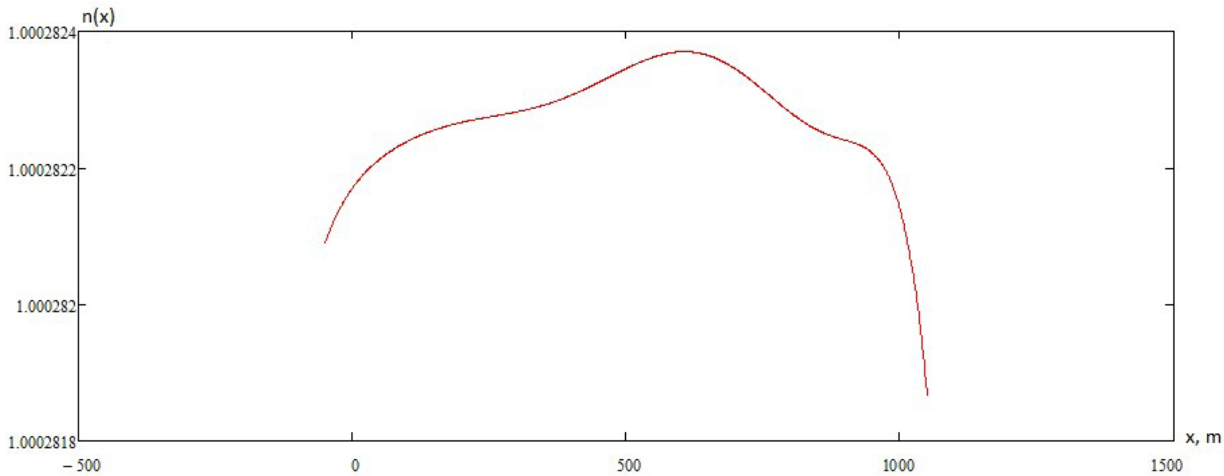

Fig. 1. Air refractive index profile along the trace

The experiment was performed using formulas (1), (2), and (3) for the variant of the location of the air refractive index control devices at two local points of the trace:

$x = 0$, $x = L$ for the trapezoidal quadrature;

$x_1 = \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)$, $x_2 = \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)$ for the Gaussian quadrature.

The effectiveness of the formulas is determined by comparing the values of the mean integral refractive index of air obtained using formulas (2) and (3) on a trace of length L = 1000 m (using the profile $n(x)$ according to formula (4)) with the exact value of the $\overline{n}$ value calculated according to formula (1).

The results of a numerical experiment for the determination of the mean integral refractive index of air by quadratures (2) and (3) for two local points of the trace, and the exact integral (1) are given in Table 1.

It follows from the Table that the accuracy of n_{gauss} is much better than n_{tr}. To increase the

Table 1

Results of a numerical experiment for the determination of the mean refractive index of air

n_{tr}	1.0002821550000000006
n_{gauss}	1.0002822781806842066
$\overline{n}$	1.0002822860912471354

reliability of the evaluation of the corresponding type B uncertainty, it is relevant to use experimental data on the profile $n(x)$ (or close to them) on the measured trace as part of a numerical experiment.

Conclusions

The possibility of improving the accuracy of the known method of determining the refractive index of air by its two local values at the endpoints of the trace (the method being based on the use of the trapezoidal quadrature formula) is considered. The procedure for determining the mean integral refractive index from its two local values using the Gaussian quadrature is substantiated. This quadrature has a residual term of a higher order of smallness than the trapezoidal quadrature. Based on the results of the analysis and numerical experiment using a model refractive index profile for the measured trace, it was concluded that the Gaussian quadrature provides higher accuracy than the trapezoidal quadrature.

Перспективи використання квадратури Гауса для визначення середньоінтегрального показника заломлення повітря за його локальними значеннями, виміряними у двох точках траси

О.В. Прокопов, А.І. Шлома

Національний науковий центр "Інститут метрології", вул. Мироносицька, 42, 61002, Харків, Україна
alexvas49@ukr.net; andreus0082@gmail.com

Анотація

Суттєвий вплив на результати лазерних далекомірних вимірювань на навколоземних трасах надає земна атмосфера. Цей вплив обумовлено залежністю швидкості поширення лазерного сигналу від показника заломлення повітря, що змінюється вздовж вимірюваної траси. Правильне врахування зазначеного впливу має важливе значення для реалізації метрологічної простежуваності лінійних вимірювань від еталона довжини до вимірювань відстаней у великомасштабному будівництві, геодезії, геодинаміці, навігації тощо. Для забезпечення необхідної точності таких вимірювань їхні результати потребується коригувати шляхом введення поправки на середньоінтегральний показник заломлення повітря уздовж траєкторії сигналу.

Нині активно розвиваються два підходи до визначення величини середньоінтегрального показника заломлення. По-перше, підхід, що ґрунтується на прямих вимірюваннях, за допомогою яких ця величина визначається безпосередньо (апаратурні методи). По-друге, заснований на непрямих вимірюваннях підхід, у рамках якого інтеграл від показника заломлення за допомогою відомих в обчислювальній математиці квадратурних формул перетворюється на функцію локальних значень параметрів атмосфери в дискретних точках траси (це так звані методи точкової апроксимації).

Найпростіший та часто застосовуваний на практиці метод визначення цієї поправки спирається на використання квадратурної формули трапецій у найпростішому її варіанті, що вимагає визначення лише двох локальних значень показника заломлення в кінцевих точках траси. Точність зазначеного методу часто виявляється недостатньою. У зв'язку з цим у цій статті представлено результати досліджень, що дали змогу обґрунтувати точнішу модель визначення обговорюваної поправки за двома локальними значеннями показника заломлення. Запропонована модель базується на використанні квадратури Гауса, для якої локальні значення визначаються не в кінцевих точках траси, а всередині інтервалу інтегрування.

Ключові слова: квадратура; показник заломлення повітря; далекомірні вимірювання; траси; локальні точки.

References

1. Neyezhmakov P., Prokopov A. Analysis of the accuracy of the gradient method for determining the mean integral refractive index of air. *Ukrainian Metrological Journal*, 2018, no. 4, pp. 43–48. doi: 10.24027/2306-7039.4.2018.155754
2. Samborska O.M., Shelestovskyi B.H. Chyselni metody. Navchalnyi posibnyk dlia studentiv vyshchykh tekhnichnykh navchalnykh zakladiv [Numerical Methods. Textbook for Students of Higher Technical Educational Institutions]. Ternopil, 2010. 164 p. (in Ukrainian).
3. Tsehelyk H. Chyselni metody. Pidruchnyk [Numerical Methods. Textbook]. Lviv, 2004. 408 p. (in Ukrainian).
4. Neyezhmakov P., Prokopov A. On the Accuracy of Determining the Mean Integral Refractive Index of Air By its Values at the End Points of the Trace. *2022 XXXII International Scientific Symposium Metrology and Metrology Assurance* (*MMA*), Sozopol, Bulgaria, 2022, pp. 1–4. doi: 10.1109/MMA55579.2022.9992519
5. Krylyk L.V., Bohach I.V., Lisovenko A.I. Chyselni metody. Chyselne intehruvannia funktsii: navchalnyi posibnyk [Numerical Methods. Numerical Integration of Functions: Study Guide]. Vinnytsia, 2019. 74 p. (in Ukrainian).
6. Bihun Ya.I. Chyslovi metody: navchalnyi posibnyk [Numerical Methods: Study Guide]. Chernivtsi, 2019. 436 p. (in Ukrainian).
7. Horda O.V. Chyselni metody. Rozviazannia neliniinykh rivnian ta system rivnian: konspekt lektsii [Numerical Methods. Development of Nonlinear Levels and Level Systems: Lecture Notes]. Kyiv, 2010. 72 p. (in Ukrainian).
8. Neyezhmakov P., Prokopov A., Shloma A. Uncertainty in determining the mean integral refractive index of air by its local values measured at the points of the trace. *Theses of reports XX International Scientific and Technical Seminar "Uncertainty in Measurement: Scientific, Normative, Applied and Methodical Aspects"* (*UM-2023*). Sofia, Bulgaria, November 27–28, 2023, p. 47.