



УДК 65.011.8.69.014

Сучасні методи оцінки похибок графічної інтерполяції рельєфу

Т.А. Наливайко¹, Т.Т. Наливайко², О.Є. Поморцева³

¹Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого, 25, 61002, Харків, Україна

²Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, просп. Науки, 9А, 61166, Харків, Україна

³Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна
elenapomor7@gmail.com

Анотація

Метою дослідження є розкриття сучасних підходів визначення висот точок місцевості на топографічних планах і картах. Це особливо важливо при побудові цифрових моделей рельєфу, під час використання комп'ютерних систем для цифрової картографії та автоматизованого створення карт.

Аналіз світових тенденцій показує, що точне визначення висот точок вкрай важливе при рекогностуванні місцевості під час складання планово-висотного обґрунтування; при виконанні різних видів геодезичних робіт для проєктування та будівництва споруд підземних комунікацій, а також у військовій справі для оперативної дислокації військової техніки.

Похибки при графічному визначенні висот точок місцевості на топографічних планах і картах, які можуть виникати з причин похибки креслення та графічного зображення горизонталей, похибки внаслідок зміщення висот у плановому визначенні положення точок, похибки під час неточної інтерполяції горизонталей можуть призводити до зниження економічної ефективності геодезичних робіт за зменшення загальної точності робіт.

У роботі запропоновано методику, яка дозволяє отримувати попередні необхідні дані прийнятної точності для виконання геодезичних робіт і надає змогу відмовитись від дорогих та малопродуктивних інструментальних методів вимірювання.

У результаті виконаних досліджень розраховано залежності похибок графічного визначення висот на топографічних планах і картах при різних умовах рельєфу і масштабів топографічних планів та карт.

Запропонована методика дозволяє отримувати попередні необхідні дані для виконання геодезичних робіт із похибкою, яка не перевищує допустиму величину.

Пропонуються формули розрахунку величин похибок залежно від різного виду складності перетину рельєфу, а також різних масштабів топографічних планів і карт.

Ключові слова: графічна інтерполяція; рекогностування місцевості; висота перетину рельєфу; допустима нев'язка; візуальне нівелювання; геодезичні технології.

Отримано: 01.12.2025

Відредаговано: 21.01.2026

Схвалено до друку: 27.01.2026

Постановка проблеми

Одним із важливих етапів топографо-геодезичних робіт є визначення висот точок місцевості, від точності яких залежить якість створення топографічних планів, інженерно-геодезичних зйомок та подальше проєктування. Однак при визначенні висот завжди постає питання про точність, із якою необхідно визначати положення висоти точки.

Оцінка точності визначення висот є важливим завданням у геодезії, картографії й інших суміжних

галузях, оскільки від неї залежить якість створення топографічних планів та карт і проведення інженерних вишукувань. Тому актуальним залишається питання розроблення ефективних методів оцінки точності графічного визначення висот, що дозволяють отримувати попередні дані прийнятної точності для виконання геодезичних робіт.

Проблема полягає в тому, що при графічному визначенні висот на топографічних планах і картах виникають похибки, зумовлені неточністю крес-

лення та зображення горизонталей, зміщенням у плановому положенні точок, а також похибками під час інтерполяції між горизонталями. Сукупність цих похибок може призводити до суттєвого зниження загальної точності визначення висот і, відповідно, до зменшення економічної ефективності геодезичних робіт.

Одним із методів, який широко застосовується для визначення висот за графічними матеріалами, є метод графічної інтерполяції, який передбачає використання горизонталей, нанесених на топографічні плани та карти, для обчислення висот точок, розташованих між ними. Незважаючи на простоту і доступність, цей метод має певні обмеження щодо точності, які обумовлені масштабом карти, якістю її виготовлення, а також методикою проведення вимірювань.

Для підвищення ефективності процесу визначення висот методом графічної інтерполяції необхідно встановити закономірності зміни похибок залежно від складності рельєфу та масштабу топографічних планів і карт, а також розробити формули розрахунку допустимих похибок для різних умов зйомки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Висоти точок, які визначаються графічним шляхом, використовуються на різних стадіях геодезичних робіт: рекогносцювання місцевості під час складання планово-висотного обґрунтування; при виконанні різних видів геодезичних робіт для проектування та будівництва споруд підземних комунікацій (водопроводу, каналізації, газопроводу, теплотрас, електрокабелів) [1, 2]. Особливе значення такі дані також мають у військовій справі при оперативній дислокації військової техніки, в оборонних заходах, у процесі проектування інженерних споруд та іншої інфраструктури [3].

Також у наш час широке застосування знаходять цифрові моделі рельєфу, отримані з використанням машинного навчання, зваженої інтерполяції та методів просторової інтерполяції з наземними контрольними точками. Висока точність даних забезпечується за допомогою методу глобальної системи позиціонування шляхом просторової інтерполяції, такої як кригінг та триангуляція з методами лінійної інтерполяції. Такий підхід зменшує похибку висот [4, 5].

У наш час повсюдно використовуються технології, пов'язані з побудовою та використанням комп'ютерних систем для цифрової картографії. Автоматизоване створення карт потребує у свою чергу просторових баз даних та відповідних технологій для геоінформаційних систем [6].

Щодо точності цифрових моделей рельєфу, то для оцінки точності пропонується використовувати два набори опорних точок, а також підхід вирівнювання за даними. Оцінка точності пови-

нна включати обчислення середньоквадратичної помилки для всіх цифрових моделей рельєфу та методів інтерполяції, а саме бікубічний метод інтерполяції [7–8].

Виклад основного матеріалу

Помилка графічного визначення висот точок місцевості на топографічних планах і картах може виникати з різних причин, до яких можна віднести [9]:

- похибки креслення та графічного зображення горизонталей – $m_{кр}$;
- похибки внаслідок зміщення висот у плановому визначенні положення точок – $m_{пл}$;
- похибки, які виникають під час неточної інтерполяції горизонталей – $m_{ин}$, кожна величина даних похибок діє як випадкова складова, тому сумарна похибка $m_{заг}$, визначення висот графічним способом, буде мати такий вигляд:

$$m_{заг} = \sqrt{m_{кр}^2 + m_{пл}^2 + m_{ин}^2}. \quad (1)$$

У формулі (1) похибки креслення та графічного зображення горизонталей складаються з похибок, які утворюються внаслідок визначення висот опорної геодезичної планово-висотної знімальної мережі й похибок графічного положення горизонталей відносно ближніх точок знімального обґрунтування. На основі різного виду складності перетину рельєфу, а також різних масштабів топографічних планів і карт, величини похибок $m_{кр}$ будуть визначатися у міліметрах за формулою:

$$m_{кр} = \sqrt{m_M^2 + m_r^2 + 0,25 \frac{h^2}{p^2} * r^2 + \frac{400 * d^2}{p^2 * v^2}}, \quad (2)$$

де m_M – похибка висотного положення геодезичної знімальної мережі (при технічному нівелюванні вона не перевищує $\pm 3 \div 4$ мм);

m_r – похибка графічного положення горизонталей відносно ближніх точок знімального обґрунтування, наприклад, для масштабу 1:500 становить ± 50 мм;

h – висота перетину рельєфу між горизонталями;

d – відстань між точками на місцевості знімальної геодезичної мережі;

r – ціна поділки циліндричного рівня горизонтального круга теодоліта;

v – збільшення зорової труби теодоліта або електронного тахеометра.

Згідно з формулою (2) похибка $m_{кр}$ для масштабу 1:500 буде дорівнювати $\pm 50,1$ мм.

Похибка у висотному положенні $m_{пл}$, яка виникає внаслідок зміщення пунктів у плановому положенні, визначається за формулою [10]:

$$m_{пл} = M * \operatorname{tg} \alpha, \quad (3)$$

де M – похибка планового положення пунктів, визначається з розрахунків як мінімальний діа-

метр точки, яку може побачити око людини, тобто $\min \varnothing = 0,1$ мм; α – величина вертикального кута нахилу місцевості.

Якщо прийняти середній кут нахилу $\alpha = 3^\circ$, тоді похибка $m_{на}$, наприклад, для масштабу 1:500, згідно з формулою (3) буде дорівнювати:

$$m_{на} = 50 \text{ мм} * \text{tg} 3^\circ = 50 \text{ мм} * 0,05241 = 3 \text{ мм}.$$

Для визначення похибок, які виникають внаслідок неточності інтерполяції горизонталей $m_{ин}$, необхідно враховувати те, що похибка інтерполявання може досягати 1:10 довжини відрізка, внаслідок якого виконується інтерполяція, тобто 0,1 величини масштабу закладання – ϵ , тоді згідно з формулою:

$$m_{ин} = 0,1 * \epsilon * \text{tg} \alpha, \quad (4)$$

$$\epsilon = \frac{h}{\text{tg} \alpha}. \quad (5)$$

Далі для середньої величини кута нахилу місцевості α , згідно з формулами (4) та (5), отримуємо таку формулу визначення похибок інтерполяції горизонталей:

$$m_{ин} = 0,1 * \frac{h}{\text{tg} \alpha} * \text{tg} \alpha = 0,1 * h. \quad (6)$$

Усі результати похибок креслення та графічного зображення горизонталей – $m_{кр}$; похибок внаслідок зміщення висот у плановому визначенні положення точок – $m_{на}$; похибок, які виникають внаслідок неточної інтерполяції горизонталей – $m_{ин}$, а також їх середня квадратична сумарна похибка – $m_{заг}$ при різних умовах рельєфу і масштабів топографічних планів та карт 1:500, 1:1000, 1:2000, 1:5000 і 1:10000, наведені у табл. 1. Величина похибки $m_{кр}$ визначалась за формулою (1), величина похибки $m_{на}$ – за формулою (2), величина похибки $m_{ин}$ – за формулою (3). Дослідження з визначення величин похибок виконувалося з урахуванням рельєфу місцевості з нормальним перетином та при середньому куті нахилу.

Таблиця 1

Залежності похибок графічного визначення висот на топографічних планах і картах

Масштаб	$m_{кр}$ (мм)	$m_{на}$ (мм)	$m_{ин}$ (мм)	$m_{заг}$ (мм)
1:500	50	3	5	50
1:1000	100	5	10	100
1:2000	200	10	20	201
1:5000	500	26	50	503
1:10000	1000	52	100	1006

Оцінка точності

Для достовірності оцінки точності одержаних результатів були виконані додаткові дослідження на місцевості, основною задачею яких були ві-

зуальні вимірювання з визначення висот обраних точок. Вимірювання виконувалися на основі геометричного нівелювання (за допомогою нівеліра з компенсатором 2Н10КЛ) та тригонометричного (за допомогою електронного тахеометра SOKKIA SET6302) нівелювання. Одержані висоти порівнювалися з висотами, визначеними шляхом інтерполяції горизонталей на топографічних планах масштабів 1:500 і 1:2000 з перетином рельєфу відповідно 0,25 і 0,5 м.

Геометричне нівелювання виконувалося шляхом прокладання замкнутого нівелірного ходу з допустимою нев'язкою відносно точності технічного нівелювання:

$$fh_{дон} = \pm 10\sqrt{n} = \pm 50\sqrt{L}, \quad (7)$$

де n – кількість нівелірних станцій; L – довжина нівелірного ходу в км.

Аналіз точності тригонометричного нівелювання виконувався на основі визначення загальної середньоквадратичної похибки перевищення m_h за формулою [11]:

$$m_h = \sqrt{m_s^2 * \frac{1}{4} \sin^2 v + S^2 * \cos^2 v * 2v * \frac{m_v^2}{p^2}}, \quad (8)$$

де S – довжина лінії візування;

v – величина вертикального кута;

m_s – похибка вимірювання довжини лінії;

m_v – похибка вимірювання вертикальних кутів;

$p = 206369$ – радіанна міра в секундах.

З порівняльної характеристики отриманих результатів можна зробити висновок про те, що розходження висот точок, взятих з планів і визначених візуальним нівелюванням, не перевищує для масштабу 1:500 – $m_h \leq \pm 48$ мм, а для масштабу 1:2000 – $m_h \leq \pm 193$ мм. Для порівняння відповідно для тих же масштабів сумарна похибка $m_{заг} = \pm 50$ мм і 201 мм, що підтверджується в цілому достовірністю визначення похибок, наведених у табл. 1.

Висновки

На основі проведеного аналізу з визначення методом графічної інтерполяції висот точок на топографічних картах і планах було отримано наведені нижче результати.

Матеріали досліджень підтверджують, що висоти точок місцевості на топографічних планах і картах можна визначити з похибкою, яка не перевищує величин, зазначених у табл. 1.

Запропонована методика дозволяє оперативного отримувати необхідну попередню інформацію при виконанні геодезичних робіт у процесі проектування, реконструкції та будівництва інженерних споруд.

У більшості випадків при використанні цієї методики можна відмовитись від дорогих та малопродуктивних інструментальних методів вимірювання.

Modern methods for error estimation in graphical interpolation of relief

T. Nalivayko¹, T. Nalivayko², O. Pomortseva³

¹Kharkiv National Automobile and Highway University, Yaroslava Mudrogo Str., 25, 61002, Kharkiv, Ukraine

²Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Nauky Ave., 9a, 61166, Kharkiv, Ukraine

³V.N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq., 4, 61022, Kharkiv, Ukraine

elenapomor7@gmail.com

Abstract

The purpose of the study, the materials of which are presented in this paper, is to disclose modern approaches to the determination of elevations of terrain points on topographic plans and maps. This is crucial when constructing digital models of relief and terrain, when using computer systems for digital cartography and automated map generation. According to the analysis of global trends, precise determination of point elevations is of paramount importance when reconnoitring terrain during the preparation of planning and elevation justifications; when performing various types of geodetic works for the design and construction of underground utilities (water supply, sewage, gas pipelines, heating mains, electrical cables), as well as in military affairs when deploying military equipment. This is especially relevant today, when technologies related to the use of computer systems for digital cartography are widely used. Errors in the graphical determination of terrain elevations on topographic plans and maps, which may arise due to errors in drawing and graphical representation of contours, errors due to displacement of elevations in the planimetric determination of point positions, as well as errors during inaccurate interpolation of contours, can lead to a decrease in the economic efficiency of geodetic works by reducing the overall accuracy of the works.

The paper proposes a method that allows obtaining preliminary data of acceptable accuracy for performing geodetic works and makes it possible to abandon expensive and inefficient instrumental measurement methods.

As a result of the study, the dependencies of errors in the graphical determination of elevations on topographic plans and maps under various relief conditions and scales of topographic plans and maps were calculated.

The proposed method allows obtaining preliminary necessary data for performing geodetic works with an error that does not exceed the permissible value.

Formulas for calculating error values depending on the different types of terrain complexity, as well as different scales of topographic plans and maps, are proposed.

To validate the proposed method and confirm its accuracy, additional field studies were conducted, the main task of which was to perform visual measurements to determine the elevations of selected points. Based on the results obtained, it can be concluded that the difference in the elevations of points taken from plans and determined by visual levelling does not exceed the permissible limits.

Keywords: graphic interpolation; terrain reconnaissance; contour interval; permissible deviation; visual levelling; geodetic technologies.

Список літератури

1. Серант О.В., Кубрак О.Д., Ярема Н.П., Батура М.В., Рачок В.І. Особливості побудови геодезичної мережі для розробки відкритих родовищ рудних копалин. *Молодий вчений*. 2020. № 11 (87). С. 9–14. doi: <https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-11-87-3>
2. Розум Р.І., Буряк М.В., Вітровий А.О., Волошин Р.В. та ін. Геодезія та землеустрій: монографія. Тернопіль: ТНЕУ, 2020. 247 с.
3. Наливайко Т.А., Наливайко Т.Т., Поморцева О.Є., Казаченко Д.А. Основні проблеми цифровізації будівельних робіт. Шляхи вирішення. *Комунальне господарство міст*. 2024. Т. 1. Вип. 182. С. 137–142. doi: <https://doi.org/10.33042/2522-1809-2024-1-182-137-142>
4. Kandil W.M., Zarzoura F.H., Goma M.S., Shetiwi M.E.-M. Rapid enhanced-DEM using Google Earth Engine, machine learning, weighted and spatial interpolation techniques. *World Journal of Engineering*, 2025, vol. 22, issue 5, pp. 1039–1053. doi: <https://doi.org/10.1108/WJE-05-2024-0315>
5. Наливайко Т.А., Наливайко Т.Т., Поморцева О.Є. Впровадження нових методів обробки геодезичних вимірів із використанням супутникових технологій. *Український метрологічний журнал*. 2025. № 2. С. 61–68. doi: <https://doi.org/10.24027/2306-7039.2.2025.333863>
6. Visvalingam M. Trends and concerns in digital cartography. *Computer-Aided Design*, 1990, vol. 22, no. 3, pp. 115–130. doi: [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(90\)90070-S](https://doi.org/10.1016/0010-4485(90)90070-S)

7. Krdžalić D., Čatić J., Vrce E., Omičević Dž. Evaluating the accuracy of the digital elevation models (DEMs) within the territory of Bosnia and Herzegovina. *Remote Sensing Applications: Society and Environment*, 2024, vol. 34(7), 101187. doi: <https://doi.org/10.1016/j.rsase.2024.101187>
8. Mamonov K., Nalivayko T., Nalivayko T., Pomortseva O., Kobzan S. Modern approaches to studying the accuracy of determination of deformation values in geodesic monitoring of crane equipment. *Ukrainian Metrological Journal*, 2024, № 1, pp. 59–64. doi: <https://doi.org/10.24027/2306-7039.1.2024.300958>
9. Наливайко Т.А., Наливайко Т.Т., Казаченко Д.А. Обґрунтування системи геодезичного моніторингу із використанням рейки змінної довжини. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*. 2021. № 1(41). С. 68–73. doi: <https://doi.org/10.33841/1819-1339-1-41-68-73>
10. Beutler G., Bauersima I., Botton S. et al. Accuracy and biases in the geodetic application of the Global Positioning System. *Manuscripta Geodaetica*, 1989, vol. 14, pp. 28–35.
11. Dibyayan Chakraborty, Harmender Gahlawat, Bodhayan Roy. Algorithms and complexity for geodetic sets on partial grids. *Theoretical Computer Science*, 2023, vol. 979. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2023.114217>
4. Kandil W.M., Zarzoura F.H., Goma M.S., Shetwi M.E.-M. Rapid enhanced-DEM using Google Earth Engine, machine learning, weighted and spatial interpolation techniques. *World Journal of Engineering*, 2025, vol. 22, issue 5, pp. 1039–1053. doi: <https://doi.org/10.1108/WJE-05-2024-0315>
5. Nalivayko T., Nalivayko T., Pomortseva O. Vprovadzhennia novykh metodiv obrobky heodezychnykh vymiriv iz vykorystanniam suputnykovykh tekhnolohii [Implementation of new methods of processing geodetic measurements using satellite technologies]. *Ukrainian Metrological Journal*, 2025, no. 2, pp. 61–68 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.24027/2306-7039.2.2025.333863>
6. Visvalingam M. Trends and concerns in digital cartography. *Computer-Aided Design*, 1990, vol. 22, no. 3, pp. 115–130. doi: [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(90\)90070-S](https://doi.org/10.1016/0010-4485(90)90070-S)
7. Krdžalić D., Čatić J., Vrce E., Omičević Dž. Evaluating the accuracy of the digital elevation models (DEMs) within the territory of Bosnia and Herzegovina. *Remote Sensing Applications: Society and Environment*, 2024, vol. 34(7), 101187. doi: <https://doi.org/10.1016/j.rsase.2024.101187>
8. Mamonov K., Nalivayko T., Nalivayko T., Pomortseva O., Kobzan S. Modern approaches to studying the accuracy of determination of deformation values in geodesic monitoring of crane equipment. *Ukrainian Metrological Journal*, 2024, № 1, pp. 59–64. doi: <https://doi.org/10.24027/2306-7039.1.2024.300958>
9. Nalivayko T., Nalivayko T., Kazachenko D. Obgruntuvannia systemy heodezychnoho monitorynhu iz vykorystanniam reiky zminnoi dovzhyny [Rationale for a geodesic monitoring system using a variable length rail]. *Modern achievements of geodesic science and industry*, 2021, vol. 1(41), pp. 68–73 (in Ukrainian). doi: <http://doi.org/10.33841/1819-1339-1-41-68-73>
10. Beutler G., Bauersima I., Botton S. et al. Accuracy and biases in the geodetic application of the Global Positioning System. *Manuscripta Geodaetica*, 1989, vol. 14, pp. 28–35.
11. Dibyayan Chakraborty, Harmender Gahlawat, Bodhayan Roy. Algorithms and complexity for geodetic sets on partial grids. *Theoretical Computer Science*, 2023, vol. 979. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2023.114217>

References

1. Serant O., Kubrak O., Yarema N., Batura M., Raczok V. Osoblyvosti pobudovy heodezychnoi merezhi dlia rozrobky vidkrytykh rodovyshch rudnykh kopalyn [Peculiarities of construction of geodetic network for development of open mineral deposits]. *Young Scientist*, 2020, vol. 11(87), pp. 9–14 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-11-87-3>
2. Rozum R.I., Buryak M.V., Vitrovy A.O., Voloshyn R.V. et al. Heodeziia ta zemleustrii: monohrafiia [Geodesy and land management: monograph]. Ternopil, 2020. 247 p. (in Ukrainian).
3. Nalyvaiko T., Nalyvaiko T., Pomortseva O., Kazachenko D. Osnovni problemy tsyfrovizatsii budivelynykh robot. Shliakhy vyrishennia [Main problems of digitalization of construction works. Solution ways]. *Municipal economy of cities*, 2024, vol. 1, no. 182, pp. 137–142 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.33042/2522-1809-2024-1-182-137-142>